N 51/527

шкафъ 17
полка III.
№ 15.

18.

421

№ 51/527

19187
Д

N 51/524

АА

СОБРАНІЕ

ПРИМѢРОВЪ, ФОРМУЛЪ И ЗАДАЧЪ

ИЗЪ

БУКВЕННАГО ВЫЧИСЛЕНІЯ

И

АЛГЕБРЫ.

СОЧИНЕНІЕ

МЕЙЕРА ГИРША.

ПЕРЕВОДЪ СЪ НѢМЕЦКАГО.

ИЗДАНІЕ ПЯТОЕ.

ВЪ ТРЕХЪ ОТДѢЛЕНІЯХЪ.

ПУБЛ. БИБЛ. имени В. И. ЛЕНИНА С. С. С. Р.
ф21-12978

САНКТПЕТЕРБУРГЪ.

1861.

ПЕЧАТАТЬ ПОЗВОЛЯЕТСЯ,

съ тѣмъ, чтобы по напечатаніи представлено было въ Цензурный Комитетъ узаконенное число экземпляровъ.

С.-Петербургъ, 2 сентября 1860 года.

Цензоръ *А. Ярославцовъ.*

2007040962

Въ типографіи И. И. Глазунова и Комп.

ОГЛАВЛЕНІЕ.

—

	Стр.
Примѣры различныхъ способовъ дѣйствій въ вычисленіи	1
1. Сложеніе	2
2. Вычитаніе	4
3. Сложеніе и вычитаніе	6
4. Умноженіе	7
5. Дѣленіе	15
Случаи, когда дѣлимое не дѣлится на дѣлителя на цѣло	22
6. Степени степеней	24
Приведенія къ простѣйшему виду изъ чиселъ:	
1. Приведеніе къ простѣйшему виду чрезъ соединеніе дробей	25
2. Приведеніе къ простѣйшему виду чрезъ сокращеніе дробей	27
Извлеченіе корней и дѣйствія надъ коренными величинами	29
1. Квадратные и кубическіе корни:	
a) Квадратные корни	30
b) Кубическіе корни	32
2. Корни изъ буквенныхъ выраженій:	
a) Корни изъ простыхъ буквенныхъ выраженій	34
b) Квадратные корни изъ сложныхъ буквенныхъ выраженій	—
c) Кубическіе корни изъ сложныхъ буквенныхъ выраженій	36
d) Квадратные и кубическіе корни изъ неполныхъ квадратовъ и кубовъ	37
3. Дѣйствія надъ коренными величинами:	
a) Сложеніе и вычитаніе	38
b) Сокращенія и переобразованія	39
c) Умноженіе	42
d) Дѣленіе	46
e) Квадратный корень изъ бинома вида $A \pm \sqrt{(B)}$	49

Стр.

Изображеніе коренныхъ величинъ посредствомъ дробныхъ показателей и дѣйствія надъ оными 50
1. Знакоположеніе 51
2. Дѣйствія надъ дробными степенями.
a) Умноженіе ..... —
b) Дѣленіе 54
c) Степени степеней 55
Дѣйствія надъ мнимыми величинами 56
1. Сложеніе и вычитаніе 57
2. Умноженіе ..... —
3. Дѣленіе 58
4. Квадратный корень изъ бинома, имѣющаго видъ $A + B\sqrt{(-1)}$. 59
5. Различныя произведенія къ простѣйшему виду 61
О логариѳмахъ 64
1. Главныя формулы 65
2. Приложеніе сихъ формулъ къ опредѣленію логариѳмовъ произведеній, частныхъ, степеней и корней.
a) Примѣры для общихъ и алгебраическихъ выраженій ... —
b) Примѣры для численныхъ выраженій по системѣ Брига. 66
3. Употребленіе пропорціональныхъ частей при вычисленіи посредствомъ логариѳмовъ.
a) Опредѣленіе логариѳмовъ такихъ чиселъ, которыя не находятся въ таблицахъ 70
b) Опредѣленіе чиселъ, которыхъ точные логариѳмы не находятся въ таблицахъ 71
4. Примѣры вычисленія нѣкоторыхъ численныхъ выраженій посредствомъ логариѳмовъ ..... —
Перестановленія (Permutationen), соединенія (Combinationen) и сопряженія (Variationen) 74
1. Перестановленія.
a) Таблицы перестановленія данныхъ буквъ ..... —
b) Число перестановленій 77
2. Соединенія.
a) Соединенія съ повтореніями 78
b) Соединенія безъ повтореній 82
3. Сопряженія.
a) Сопряженія съ повтореніями 84
b) Сопряженія безъ повтореній 85

Стр.

О двучленныхъ и многочленныхъ количествахъ съ цѣлыми положительными показателями:

1. Нютоновъ биномъ 87
   Опредѣленіе отдѣльныхъ членовъ 91
2. Возвышеніе въ степени многочленныхъ количествъ 92

Прогрессіи:

1. Ариѳметическія прогрессіи 95
   Таблица формулъ ариѳметическихъ прогрессій 96
   Ряды перваго порядка у которыхъ первый членъ есть 1 98
   Многоугольныя числа ..... —
   Пирамидальныя числа 99
   Ряды, происходящіе отъ суммованія натуральныхъ чиселъ ..... —
2. Геометрическія прогрессіи 100
   Таблица формулъ геометрическихъ прогрессій 102

Непрерывныя или цѣпныя дроби:

1. О непрерывныхъ дробяхъ вообще 103
2. Превращеніе обыкновенной дроби въ непрерывную 106
3. Превращеніе коренной величины $\sqrt{(A)}$ въ непрерывную дробь. 108

Строгое рѣшеніе ариѳметическихъ уравненій, съ нѣкоторыми предварительными примѣчаніями:

1. *Объ уравненіяхъ вообще* 113
2. Уравненія первой степени:
   a) Уравненія съ одною неизвѣстною величиною 115
      Логариѳмическія уравненія 120
   b) Уравненія со многими неизвѣстными величинами 121
3. Уравненія второй степени:
   a) Уравненія съ одною неизвѣстною величиною 128
   b) Уравненія съ многими неизвѣстными величинами 133
4. Рѣшеніе уравненій высшихъ степеней:
   a) Рѣшеніе уравненій посредствомъ Кардановой формулы ... 138
   b) Рѣшеніе уравненій, имѣющихъ одинъ или нѣсколько раціональныхъ (соизмѣримыхъ) корней 140
5. Общіе случаи, въ которыхъ уравненія со многими неизвѣстными удобно рѣшаются 142

Рѣшеніе уравненій по приближенію.

1. Уравненія съ одною неизвѣстною величиною:
   Первый способъ 144
   Второй способъ 147

Стр.

2. Уравненія со многими неизвѣстными 151
Первая поправка 152
Вторая поправка 153
Задачи для уравненій первой степени съ одною неизвѣстною величиною. 155
Задачи для уравненій первой степени со многими неизвѣстными величинами 194
Задачи для уравненій второй степени съ одною и со многими неизвѣстными величинами 214
Задачи для уравненій высшихъ степеней 233
Неопредѣленныя задачи. (Анализъ Діофанта) 244
Задачи, относящіяся къ прогрессіямъ и фигурнымъ числамъ 260
Задачи, относящіяся къ вычисленіямъ процентовъ, доходовъ и другія, принадлежащія къ этому роду 272
Задачи, относящіяся къ перестановленіямъ, соединеніямъ и сопряженіямъ, равно и къ вычисленію вѣроятностей 284
Смѣшанныя задачи 294

ОТДѢЛЕНІЕ ПЕРВОЕ,

СОДЕРЖАЩЕЕ

ПРИМѢРЫ РАЗЛИЧНЫХЪ СПОСОБОВЪ ДѢЙСТВІЙ ВЪ ВЫЧИСЛЕНІИ.

Значительныя усовершенствованія математическихъ наукъ въ послѣднія столѣтія, происшедшія отъ сего многоразличіе и запутанность ихъ правилъ и предложеній съ одной стороны, равнымъ образомъ ограниченность нашихъ умственныхъ способностей съ другой, заставили ввести условные знаки, болѣе удобные, по краткости и опредѣлительности, для изображенія нашихъ мыслей, нежели слова. Какими средствами, съ помощью буквеннаго исчисленія, достигаютъ сей цѣли? Какими знаками означаютъ сложеніе, вычитаніе, умноженіе и дѣленіе? — Что̀ называется соединеніемъ величинъ? Что̀ означаютъ скобки? гдѣ онѣ употребляются? произойдетъ ли недоразумѣніе, ежели онѣ будутъ пропущены? — Что такое коэффиціенты?

Что̀ называется противоположными величинами? Гдѣ находимъ примѣры оныхъ? — Что̀ такое величины положительныя и отрицательныя? — Величины бываютъ противоположными однѣ въ разсужденіи другихъ только по взаимному ихъ отношенію. — Какъ называются величины, не принимая въ раз-

сужденіе сего отношенія? — Сложеніе противоположныхъ величинъ есть вычитаніе отвлеченныхъ величинъ; почему?

Что̀ называется степеннымъ количествомъ и что̀ показателемъ? Что̀ такое количество, возвышаемое въ извѣстную степень (основаніе)? — Перемѣнится ли величина степени, ежели замѣнимъ основаніе показателемъ, а показателя основаніемъ? — Какимъ образомъ производятся умноженіе и дѣленіе степеней, имѣющихъ одинаковыя основанія? Что̀ должно дѣлать, когда основанія различны? — Ежели при дѣленіи степеней получится показатель 0 или даже отрицательный, то какое значеніе имѣетъ степень въ такомъ случаѣ? Прежде-показанныя правила умноженія и дѣленія могутъ ли быть примѣнены къ таковымъ степенямъ? — Показатель 1 можетъ быть опущенъ или вновь поставленъ, когда потребуется. — При сложеніи и вычитаніи степеней можетъ ли быть сдѣлано сокращеніе? въ какихъ случаяхъ? — Что̀ требуется для того, чтобъ въ произведеніяхъ и частныхъ, получаемыхъ отъ дѣйствій надъ степенными количествами, подобное сокращеніе было возможнымъ? — Ежели у дроби степенное количество числителя требуется перевести въ знаменателя, и обратно, то какая перемѣна должна произойти съ показателемъ онаго?

---

1. Сложеніе.

1) a	2) $7a$	3) $8f$	4) a	5) $7a$
a	$5a$	f	b	$10x$
$2a$	$12a$	$9f$	$a+b$	$7a+10x$
6) a	7) $17a$	8) $5a$	9) $-6a$	10) $-3a$
$-a$	$-6a$	$-9a$	$10a$	$2a$
0	$11a$	$-4a$	$4a$	$-a$

11) $a - b$

$$\begin{array}{r} a \\ -b \\ \hline a-b \end{array}$$

12) $8a - 5b$

$$\begin{array}{r} 8a \\ -5b \\ \hline 8a-5b \end{array}$$

13) $-7a + b$

$$\begin{array}{r} -7a \\ b \\ \hline -7a+b \end{array}$$

или $b - 7a$

14) $-a - a$

$$\begin{array}{r} -a \\ -a \\ \hline -2a \end{array}$$

15) $-3a - 8a$

$$\begin{array}{r} -3a \\ -8a \\ \hline -11a \end{array}$$

16) $-8a - 3b$

$$\begin{array}{r} -8a \\ -3b \\ \hline -8a-3b \end{array}$$

или $-(8a+3b)$

17) $3a - 5a + 8a$

$$\begin{array}{r} 3a \\ -5a \\ 8a \\ \hline 6a \end{array}$$

18) $-12b - 4b + 13b$

$$\begin{array}{r} -12b \\ -4b \\ 13b \\ \hline -3b \end{array}$$

19) $-6f + 9f + 13f - 8f$

$$\begin{array}{r} -6f \\ 9f \\ 13f \\ -8f \\ \hline 8f \end{array}$$

20) $-7c - 5c - 3c$

$$\begin{array}{r} -7c \\ -5c \\ -3c \\ \hline -15c \end{array}$$

21) $5d + 7d + d - 8d$

$$\begin{array}{r} 5d \\ 7d \\ d \\ -8d \\ \hline 5d \end{array}$$

22) $8e - 4e + 7e - 11e$

$$\begin{array}{r} 8e \\ -4e \\ 7e \\ -11e \\ \hline 0 \end{array}$$

23) $3g + 2h - 5g + 7h - 10g$

$$\begin{array}{r} 3g \\ 2h \\ -5g \\ 7h \\ -10g \\ \hline -12g+9h \end{array}$$

или $9h - 12g$

24) $3a - 5a + 7a + 2b - c + 4b$

$$\begin{array}{r} 3a \\ -5a \\ 7a \\ 2b \\ -c \\ 4b \\ \hline 5a+6b-c \end{array}$$

25) $7a - 5c + 3b$
$2a - 3c - 7b$

$$\begin{array}{r} 7a-5c+3b \\ 2a-3c-7b \\ \hline 9a-8c-4b \end{array}$$

26) $5a + 4b - 3c - 7d + 8$
$3a - 12b + 7c - 10d - 4$

$$\begin{array}{r} 5a+4b-3c-7d+8 \\ 3a-12b+7c-10d-4 \\ \hline 8a-8b+4c-17d+4 \end{array}$$

27) $12h - 3c - 7f + 3g$
$-3h + 8c - 2f - 9g + 5x$

$$\begin{array}{r} 12h-3c-7f+3g \\ -3h+8c-2f-9g+5x \\ \hline 9h+5c-9f-6g+5x \end{array}$$

28) $16a - 5b + 10c - 9d$
$3a + 18b - 5c - 7d + 3e$
$-7a - 2b - 3d + 5e - 9h$
$11a - 3b + 2c + 8d + 7h$

$$\begin{array}{r} 16a-5b+10c-9d \\ 3a+18b-5c-7d+3e \\ -7a-2b-3d+5e-9h \\ 11a-3b+2c+8d+7h \\ \hline 23a+8b+7c-11d+8e-2h \end{array}$$

29)
$$\begin{array}{r} 7x-6y+5z+3-g \\ -x-3y \quad -8-g \\ -x+y-3z-1+7g \\ -2x+3y+3z-1-g \\ x+8y-5z+9+g \\ \hline 4x+3y \quad +2+5g \end{array}$$

30)
$$\begin{array}{r} 8a+b \\ 2a-b+c \\ -3a+5b \quad +2d \\ -6b-3c+3d \\ -5a \quad +7c-2d \\ \hline 2a-b+5c+3d \end{array}$$

31)
$$\begin{array}{r} -a+3b-c-115d+6e-5f \\ 3a-2b-3c-d+27e \\ 5b-8c+3e-7f \\ -7a-6b+17c+9d-5e+11f \\ -3a \quad -5c-2d+6e-9f+g \\ \hline -8a \quad -109d+37e-10f+g \end{array}$$

32)
$$\begin{array}{r} -7f+3a \\ 4f-2a \\ 3f-3a \\ +2a \\ \hline 0 \end{array}$$

Преподающій можетъ вмѣсто буквъ употреблять извѣстныя числа, чтобъ показать ученику справедливость выводовъ. Это весьма полезно, особенно для начинающихъ.

---

2. Вычитаніе.

1) $\begin{array}{r} a \\ a \\ \hline 0 \end{array}$ 2) $\begin{array}{r} 7a \\ 3a \\ \hline 4a \end{array}$ 3) $\begin{array}{r} 10f \\ 10f \\ \hline 0 \end{array}$ 4) $\begin{array}{r} 5d \\ 11d \\ \hline -6d \end{array}$ 5) $\begin{array}{r} 7a \\ 5b \\ \hline 7a-5b \end{array}$

6) $\begin{array}{r} a \\ -a \\ \hline 2a \end{array}$ 7) $\begin{array}{r} 8a \\ -a \\ \hline 9a \end{array}$ 8) $\begin{array}{r} 6a \\ -5a \\ \hline 11a \end{array}$ 9) $\begin{array}{r} a \\ -4a \\ \hline 5a \end{array}$ 10) $\begin{array}{r} a \\ -b \\ \hline a+b \end{array}$

11) $3a - 2b = 3a + 2b$

12) $-9a \quad 3a = -12a$

13) $-7a \quad -7a = 0$

14) $-19a \quad -20a = a$

15) $-6a \quad -5a = -a$

16) $-3a \quad -5b = -3a + 5b$ или $5b - 3a$

17) $-13 \quad 3 = -16$

18) $-8 \quad -17 = 9$

19) $12 \quad -7 = 19$

20) $-13 \quad -8 = -5$

21) $3a - 2b + 6$
$2a - 7b - 3$
$a + 5b + 9$

22) $13a - 2b + 9c - 3d$
$8a - 6b + 9c - 10d + 12$
$5a + 4b + 7d - 12$

23) $-7f + 3m - 8x$
$-6f - 5m - 2x + 3d + 8$
$-f + 8m - 6x - 3d - 8$

24) $2a - e - h - l$
$9a - 3e + 4h - l - c$
$-7a + 2e - 5h + c$

25) $-a - 5b + 7c - d$
$4b - 3c + 2d + 3k$
$-a - 9b + 10c - 3d - 3k$

26) $3h - 2k$
$9l - 7 - 8k$
$3h - 9l + 6k + 7$

27) $-3a + b - 8c + 7e - 5f + 3h - 7x - 13y$
$k + 2a - 9c + 8e + 7f - 7x - y - 3l - k$
$-5a + b + c - e - 12f + 3h - 12y + 3l$

28) $5b - 3a + 203c + 5$
$-2b - 8a + 67c + 7$
$7b + 5a + 136c - 2$

29) $-14b + 3c - 27d + 3 - 5g$
$7a - 5c - 8d + 3b - 12 + 7g$
$-7a - 17b + 8c - 19d + 15 - 12g$

30) $6a + 5 - 3b - 5f - g - h$
$-2a - 9b + 8g - 9h - 7f - 8$
$8a + 6b + 13 - 12f - 9g + 8h$

31) $3c - 2l + 5c$
$8l + 7c - 4l$
$c - 6l$

32) $$\begin{array}{r} 3a-17b-10b+13a-2a \\ 6b-8a-b-2a+3d+9a-5h \\ \hline 15a-32b-3d+5h \end{array}$$

33) $$\begin{array}{r} 5c+3 \\ 2c-9-7c \\ \hline 10c+12 \end{array}$$

34) $$\begin{array}{r} 8a-5b-3c-7d+5e-8f+3g+17k \\ -2k+3c-5b+2d-4e-7f+9g-5k-l \\ \hline 8a-6c-9d+9e-f-6g+24k+l \end{array}$$

35) $32a+3b-(5a+17b) = 27a-14b.$

36) $13a-(5c+3f-7a-5x+3a) = 17a-5c-3f+5x.$

37) $-8a+5b-3c-(7a-3b-2c) = -15a+8b-c.$

38) $3a-5c+3d-(7a-5d+8c-2e) = 8d+2e-4a-13c.$

39) $37a-5f-(3a-2b-5c)-(6a-4b+3h) = 28a+6b$
$-5f+5c-3h.$

40) $a+b-(2a-3b)-(5a+7b)-(-13a+2b) = 7a-5b.$

41) $\frac{1}{2}a-\frac{5}{6}x-\left(\frac{3}{4}a-\frac{1}{2}x\right)-\left(3b+\frac{11}{4}x-\frac{2}{3}a\right)=\frac{5}{12}a-\frac{37}{12}x-3b$
$=\frac{5a}{12}-\frac{37x}{12}-3b.$

---

3. Сложеніе и вычитаніе.

1) $ax^n+bx^n+cx^n+dx^n = (a+b+c+d)\ x^n.$

2) $ax^n+bx^n-cx^n-dx^n = (a+b-c-d)\ x^n.$

3) $10a^4+3a^4+6a^4-a^4-5a^4 = 13a^4.$

4) $3a^{-7}+10a^{-7}-5a^{-7}+a^2b = 8a^{-7}+a^2b.$

5) $6^4+2\cdot 8^3+3^2-19\cdot 6^4+5\cdot 8^3 = 7\cdot 8^3-18\cdot 6^4+3^2.$

6) $16a^4b^3c^5-6a^4b^3c^5+7a^4b^3c^5=17a^4b^3c^5.$

7) $\frac{5a^3}{b^4}-\frac{7a^3}{b^4}+\frac{11a^3}{b^4}+a^4=\frac{9a^3}{b^4}+a^4.$

8) $a^nb^m-9a^m+5a^nb^m+6a^m+10a^nb^m = 16a^nb^m-3a^m.$

9) $5a^{-3}b^2+7ab^2c-3a^mb^{-5}-12ab^2c+6a^{-3}b^2-9a^3b^3$
$+b^{-x}-8a^mb^{-5}-3b^{-x} = 11a^{-3}b^2-5ab^2c$
$-11a^mb^{-5}-9a^3b^3-2b^{-x}.$

10) $3 \cdot 2^{-7} + 5^6 - 8 \cdot 2^{-7} + 3a^n b^{-m}\ 13 \cdot 5^6 + 4a \cdot 2^{-7} + ca^n b^{-m} = (4a - 5)\ 2^{-7} - 12 \cdot 5^6 + (c+3)\ a^n b^{-m}$.

Примѣры сложенія.

11)
$$\begin{array}{l} 5a^4b + 3a^{-2}b^2c - 7ab \\ -6a^4b + 2a^{-2}b^2c + 17ab \\ \underline{9a^4b - 8a^{-2}b^2c - 10ab} \\ 8a^4b - 3a^{-2}b^2c. \end{array}$$

12)
$$\begin{array}{l} 5a^m b^p + 3a^{-3}b^{m-1} - \frac{3a^5}{x^p} \\ -3ca^m b^p + 4g^2a^{-3}b^{m-1} - a + \frac{10a^5}{x^p} \\ \underline{a^m b^p + a + 3a^2b^2 - 2g^2a^{-3}b^{m-1}} \\ (6-3c)a^m b^p + (2g^2+3)a^{-3}b^{m-1} + \frac{7a^5}{x^p} + 3a^2b^2. \end{array}$$

13)
$$\begin{array}{l} 9a^{-3}b^{-2}c^4 - \frac{7b}{a^3} \\ \frac{18b}{a^3} - 5a^n b^m + c^x - 3 \cdot 2^5 \\ \underline{3a^n b^m - ha^{-3}b^{-2}c^4 + 3c^x - 5 \cdot 2^5} \\ (9-h)a^{-3}b^{-2}c^4 - 2a^n b^m + \frac{11b}{a^3} + 4c^x - 8 \cdot 2^5. \end{array}$$

Прим. вычитанія.

14)
$$\begin{array}{l} 9a^m x^2 - 13 + 20ab^3x - 4b^m cx^2 \\ \underline{3b^m cx^2 + 9a^m x^2 - 6 + 3ab^3x} \\ 17ab^3x - 7b^m cx^2 - 7. \end{array}$$

15)
$$\begin{array}{l} 5a^4 - 7a^3b^2 - 3c^{-1}d^2 + 7d \\ \underline{3a^4 - 15a^3b^2 - 7c^{-1}d^2 - 3a^2} \\ 2a^4 + 8a^3b^2 + 4c^{-1}d^2 + 7d + 3a^2. \end{array}$$

---

4. Умноженіе.

1) $a \times b = b \times a = ab = ba = a \cdot b = b \cdot a$.
2) $a \times b \times c = abc = acb = bac = bca = cab = cba$.
3) $-a \times b = -ab$.

4) $a \times -b = -ab.$

5) $-a \times -b = ab.$

6) $6a \times 7b = 42\ ab.$

7) $17a \times \frac{3}{4}b = \frac{51}{4}ab = \frac{51ab}{4}.$

8) $\frac{3a}{2} \times \frac{5f}{4} = \frac{15af}{8} = \frac{15}{8}\ af.$

9) $-3a \times 14c = -42ac.$

10) $7a \times -10b = -70ab.$

11) $\frac{3}{8}a \times -\frac{2}{3}b = -\frac{1}{4}ab = -\frac{ab}{4}.$

12) $a \times -7b = -7ab.$

13) $-6a \times -11x = 66ax.$

14) $-\frac{5a}{4} \times -\frac{3b}{7} = \frac{15ab}{28}.$

15) $ab \times cde = abcde.$

16) $-5abc \times -7ade = 35a^2bcde.$

17) $-5bd \times 9b^2dxy = -45b^3d^2xy.$

18) $-\frac{1}{2}\ abd \times \frac{1}{4}\ cdef = -\frac{1}{8}abcd^2cf.$

19) $17ace \times 5 = 85ace.$

20) $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$

21) $-\frac{3fh}{5cde} \times ag = -\frac{3afgh}{5cde}.$

22) $\frac{1}{fgh} \times 4cd = \frac{4cd}{fgh}.$

23) $\frac{5ac}{bde} \times -\frac{7bfg}{3ad} = -\frac{35cfg}{3d^2e}.$

24) $-\frac{h}{2fg} \times -\frac{g}{3h} = \frac{1}{6f}.$

25) $3ab \times 2cd \times dfg = 6abcd^2fg.$

26) $-\frac{a}{b} \times b \times -5df = 5adf.$

27) $-4ab \times -\frac{3cde}{2a^2b} \times -\frac{1}{5cf} = -\frac{6de}{5af}.$

28) $-a \times -a \times -a \times -a = a^4.$

29) $\frac{2ac}{bg} \times -\frac{3bd}{4cfh} \times hf = -\frac{3ad}{2g}.$

30) $\frac{1}{a} \times -\frac{3ac}{x} \times \frac{c}{x} = -\frac{3c^2}{x^2}$.

31) $\frac{2fg}{bdh} \times \frac{3xy}{7fz} \times -\frac{bc}{5d} = -\frac{6cgxy}{35d^2hz}$.

32) $a^m \times a^n = a^{m+n}$.

33) $a^{-m} \times a^n = a^{-m+n} = a^{n-m}$.

34) $a^m \times a^{-n} = a^{m-n}$.

35) $a^{-m} \times a^{-n} = a^{-m-n} = a^{-(m+n)}$.

36) $5a^3 \times a^7 \times 7a^5 \times 3a^6 = 105a^{21}$.

37) $11a^{-2} \times 2a^{-5} \times 4a^6 \times 9a^7 = 792a^6$.

38) $2a^{-3} \times 7a^{-9} \times -3a^6 = -42a^{-6} = -\frac{42}{a^6}$.

39) $a^{-5}b \times a^{-7}d \times 10a = 10a^{-11}bd = \frac{10bd}{a^{11}}$.

40) $3 \cdot 7^{-9} \times 7^{-2} \times 4 \cdot 7^8 = 12 \cdot 7^{-3} = \frac{12}{343}$.

41) $-a^{p-q} \times -3a^{3q-2}f \times 5a^{p+7}cx = 15a^{2p+2q+5}fcx$.

42) $5a^3b^{-4} \times 10a^2b^5c \times -3a^7 = -150a^{12}bc$.

43) $-7a^{-1}b^4c^{-5} \times 3a^2b^{-5}c = -21ab^{-1}c^{-4} = -\frac{21a}{bc^4}$.

44) $5a^3b^4 \times a^2b^8 \times 4acb^{-3} = 20a^6b^9c$.

45) $h^4l^{11}x \times h^{-7}l^{-9} \times 3h^{-2}l^{-6}x^3 = 3h^{-5}l^{-4}x^4 = \frac{3x^4}{h^5l^4}$.

46) $13a^{-1}c^{-3} \times -4a^{-3}b^{-6}c^2 = 52a^{-4}b^{-6}c^{-1} = \frac{52}{a^4b^6c}$.

47) $-\frac{5}{2}a^{-2}b^3c^{-m}d^{-1} \times \frac{2}{3}a^2b^{-3}c^{-2}d^4 = -\frac{5}{3}c^{-m-2}d^3$
$= -\frac{5d^3}{3c^{m+2}}$.

48) $a^{-m}b^pc^q \times a^nb^{-r}c^s \times a^{n+m}b = a^{2n}b^{p-r+1}c^{q+s}$.

49) $f^x g^{m-1}hd \times 2f^{m+3}h^{2-m} \times 4g^{2m+1}h^{m+2}d^3$
$= 8f^{x+m+3}g^{3m}h^5d^4$.

50) $(a+y)^{-3}h^5l^4 \times (a+y)^{m+3}l^{-4}m \times (a+y)$
$= mh^5(a+y)^{m+1}$.

51) $\frac{18a^{-5}b^5}{7c^{-2}d^{-6}} \times \frac{4a^6b^{-5}}{9c^5d^9} = \frac{72ab^{-2}}{63cd^3} = \frac{8a}{7cd^3b^2}$.

52) $\frac{6a^4b^8c^{-7}}{11f^5dg^{-4}} \times \frac{3a^{-2}b^4c^{-1}}{5g^2f^6} = \frac{18a^2b^9c^{-3}}{55f^9dg^{-2}} = \frac{18a^2b^9g^2}{55f^9dc^3}$.

53) $\frac{1}{3a^{-5}b^{-m}c} \times \frac{1}{4a^{-p}b} = \frac{1}{12a^{-p-5}b^{-m+1}c} = \frac{a^{p+5}b^{m-1}}{12c}$.

54) $\frac{2a^{-m-5}b^{m+2}}{3x^{-5}y^{-n}z^p} \times \frac{6a^{-1}b^{-m}}{x^{-p}y^5} = \frac{12a^{-m-4}b^2}{3x^{-p-5}y^{-n+5}z^p} = \frac{4b^2x^{p+5}y^{n-5}}{a^{m+4}z^p}$.

55) $\frac{3a^{-5}b^2c^3f^4}{(a+b)^{-m}(c^2+x^2)} \times \frac{a^2b^{-5}c^{-2}f^{-4}}{(a+b)^{m-2}\ (c^2+x^2)^{-n+4}}$.

$= \frac{3a^{-5}b^5c}{(a+b)^{-2}(c^2+x^2)^{-n+5}} = \frac{3c(a+b)^2(c^2+x^2)^{n-5}}{a^5b^5}$.

56) $(6a + 3b - 5f) \times 5g = 30ag + 15bg - 25fg$.

57) $(-2b + 3c - g) \times -8h = 16bh - 24ch + 8gh$.

58) $(7ad - 15bc - 16acf) \times 10ab = 70a^2bd - 150ab^2c - 160a^2bcf$.

59) $\left(\frac{5a}{b} - \frac{13c}{2d} - \frac{6h}{5bg} + 7d\right) \times \frac{3a}{5d} = \frac{3a^2}{bd} - \frac{39ac}{10d^2} - \frac{18ah}{25bdg} + \frac{21a}{5}$.

60) $(a+b) \times (c+d) = ac+bc+ad+bd$.

61) $(a+b-c) \times (d-e) = ad + bd - cd - ae - be + ce$.

62) $(2a - 3b - 8c - d + 9e) \times (7f + 2g - h) = 14af - 21bf - 56cf - 7df + 63ef + 4ag - 6bg - 16cg - 2dg + 18eg - 2ah + 3bh + 8ch + dh - 9eh$.

63) $(7l - 2m - 9) \times (3l - 11m) = 21l^2 - 83lm - 27l + 22m^2 + 99m$.

64) $(2a + 5b + 3c - 5e) \times (3a + 10b + 15f) = 6a^2 + 35ab + 9ac - 15ae + 50b^2 + 30bc - 50be + 30af + 75bf + 45cf - 75ef$.

65) $(a+b) \times (a-b) = a^2 - b^2$.

66) $(a+b) \times (a+b) = a^2 + 2ab^2 + b^2$.

67) $(a-b) \times (a-b) = a^2 - 2ab + b^2$.

68) $(3a+5b-\frac{7}{2}c)\times(a-2b+9c)=3a^2-ab+\frac{47}{2}ac$
$-10b^2+52bc-\frac{63}{2}c^2.$

69) $(3c-5d+\frac{3}{4}g-\frac{5}{3}h)\times(\frac{2}{3}c-d+7g+\frac{1}{2}h)=2c^2$
$-\frac{19}{3}cd+\frac{43}{2}cg+\frac{7}{18}ch+5d^2-\frac{143}{4}dg-\frac{5}{6}dh+\frac{21}{4}g^2$
$-\frac{271}{24}gh-\frac{5}{6}h^2.$

70) $(5ab+3ac-4bc)\times(7ab-18ac+2bc+d)=35a^2b^2$
$-69a^2bc-18ab^2c+5abd-54a^2c^2+78abc^2$
$+3acd-8b^2c^2-4bcd.$

71) $13bcd+20bce-10bde)\times(4bc+3bd-12e)=52b^2c^2d$
$+80b^2c^2e+20b^2cde+39b^2cd^2-30b^2d^2e$
$-156bcde-240bce^2+120bed^2.$

72) $(5a^2-3ab+7b^2)\times(3a-b)=15a^3-14a^2b$
$+24ab^2-7b^3.$

73) $(a+b+c)\times(a+b-c)=a^2+2ab+b^2-c^2.$

74) $(3a^3+35a^2b-17ab^2-13b^3)\times(3a^2+26ab$
$-57b^2)=9a^5+183a^4b+688a^3b^2-2476a^2b^3$
$+631ab^4+741b^5.$

75) $(3a-b+2c-3d+5e)\times(17a-2b+12c)$
$=51a^2-23ab+70ac-51ad+85ae+2b^2$
$-16bc+6bd-10be+24c^2-36cd+60ce.$

76) $(a+b+c+d)\times(a-b-c-d)=a^2-b^2$
$-2bc-2bd-c^2-2cd-d^2.$

77) $(-2a+3b-c^2)\times(-3f-7a+c^2)=6af$
$-9bf+3c^2f+14a^2-21ab+5ac^2+3bc^2-c^4.$

78) $\left(\frac{3}{2}m-5n-\frac{1}{3}p^2\right)\times\left(\frac{1}{4}m-2n+6p^2\right)=\frac{3}{8}m^2-\frac{17}{4}mn$
$+\frac{107}{12}mp^2+10n^2-\frac{88}{3}np^2-2p^4.$

79) $\left(\frac{5f^2}{g}-\frac{7fg}{4h}+3f\right)\times\left(\frac{7g}{f}+\frac{2f}{g}\right)=35f-\frac{49g^2}{4h}+21g$
$+\frac{10f^3}{g^2}-\frac{7f^2}{2h}+\frac{6f^2}{g}.$

80) $\left(\frac{a^2}{x^2} - \frac{ab}{2xy} + \frac{b^2}{y^2}\right) \times \left(\frac{3a^2}{x^2} - \frac{2ab}{5xy} + \frac{b^2}{y^2}\right) = \frac{3a^4}{x^4}$
$- \frac{19a^3b}{10x^3y} + \frac{21a^2b^2}{5x^2y^2} - \frac{9ab^3}{10xy^3} + \frac{b^4}{y^4}.$

81) $(a^2 - 3ab - 5b^2) \times 4a^2b = 4a^4b - 12a^3b^2 - 20a^2b^3.$

82) $(2a^3b^5 - 5a^2c^6 + 9a^3b^2c^3) \times 3a^2bc^2 = 6a^5b^6c^2 - 15a^4bc^8$
$+ 27a^5b^3c^5.$

83) $\left(7h^{-5}l + \frac{2l^5}{h^4} - 3ah^{-3}l^2 + 7\right) \times -8h^4l^{-5} = -56h^{-1}l^{-4}$
$- 16l^{-2} + 24ahl^{-3} - 56h^4l^{-5} = \frac{24ah}{l^5} - \frac{56}{hl^4}$
$- \frac{56h^4}{l^5} - \frac{16}{l^2}.$

84) $\left(a^3b^{-4} - cb^{-5}d^3f + \frac{3c^m}{k^5}\right) \times 2bc^{-2}d = 2a^3b^{-3}c^{-2}d$
$- 2b^{-4}c^{-1}d^4f + \frac{6bc^{m-2}d}{k^5} = \frac{2a^3d}{b^3c^2} - \frac{2d^4f}{b^4c} + \frac{6bc^{m-2}d}{k^5}.$

85) $(a^{m-1}b^{2m+3} - 6a^{3-m}b^p + ab^{-m}) \times a^{3m+2}b^{m-1}$
$= a^{4m+1}b^{3m+2} - 6a^{2m+5}b^{p+m-1} + \frac{a^{3m+3}}{b}.$

86) $(a + b) \times (a + b) = (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$

87) $(a - b) \times (a-b) = (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$

88 $(a + b) \times (a - b) = a^2 - b^2.$

89) $(a^4 - 2b^3) \times (a - b) = a^5 - 2ab^3 - a^4b + 2b^4.$

90) $(x^2 - 3x - 7) \times (x-2) = x^3 - 5x^2 - x + 14.$

91) $(3k^2 - 5kl + 2l^2) \times (k^2 - 7kl) = 3k^4 - 26k^3l$
$+ 37k^2l^2 - 14kl^3.$

92) $(6f^2 - 17fl + 3l^2) \times (f^5 + 4f^4l) = 6f^7 + 7f^6l$
$- 65f^5l^2 + 12f^4l^3.$

93) $(4a^2 - 16ax + 3x^2) \times (5a^3 - 2a^2x) = 20a^5 - 88a^4x$
$+ 47a^3x^2 - 7a^2x^3.$

94) $(a^2 + a^4 + a^6) \times (a^2 - 1) = a^8 - a^2.$

95) $(a^4 - 2a^3b + 4a^2b^2 - 8ab^3 + 16b^4) \times (a + 2b) = a^5 + 32b^5$.

96) $(2a^4x^2 - 3b^4y^2) \times (2a^4x^2 + 3b^4y^2) = 4a^8x^4 - 9b^8y^4$.

97) $(7a^3 - 5a^2b + 6ab^2 - 2b^3) \times (3a^4 - 4a^3b + 16a^2b^2) = 21a^7 - 43a^6b + 150a^5b^2 - 110a^4b^3 + 104a^3b^4 - 32a^2b^5$.

98) $\left(\frac{5}{2}x^2 + 3ax - \frac{7}{3}a^2\right) \times \left(2x^2 - ax - \frac{1}{2}a^2\right) = 5x^4 + \frac{7}{2}ax^3 - \frac{107}{12}a^2x^2 + \frac{5}{6}a^3x + \frac{7}{6}a^4$.

99) $(a^6 - 3a^4b^2 + 5a^2b^4) \times (7a^4 - 4a^2b^2 + b^4) = 7a^{10} - 25a^8b^2 + 48a^6b^4 - 23a^4b^6 + 5a^2b^8$.

100) $(a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5) \times (a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3) = a^8 - 8a^7b + 28a^6b^2 - 56a^5b^3 + 70a^4b^4 - 56a^3b^5 + 28a^2b^6 - 8ab^7 + b^8$.

101) $(a^2 + az + z^2) \times (a^2 - az + z^2) = a^4 + a^2z^2 + z^4$.

102) $(15a^{-6}b^2 - 7a^{-5}b^4 + 6a^{-4}b^6) \times (8a^{-2}b^2 - 3a^{-1}b^4) = 120a^{-8}b^4 - 101a^{-7}b^6 + 69a^{-6}b^8 - 18^{-5}b^{10}$.

103) $(13a^{-5}b + 10a^{-2}b^2 - 4ab^3) \times (6a^{-3}b^2 - 18b^3 - 7a^3b^4) = 78a^{-8}b^3 - 174a^{-5}b^4 - 295a^{-2}b^5 + 2ab^6 + 28a^4b^7$.

104) $(3x^{-2}y^{-7} - 2x^2y^{-5} + 8x^6y^{-3}) \times (2x^{-3}y^{-5} + 6xy^{-3} + 12x^5y^{-1}) = 6x^{-5}y^{-12} + 14x^{-1}y^{-10} + 40x^3y^{-8} + 24x^7y^{-6} + 96x^{11}y^{-4}$.

105) $(5a^3b^3c^2 - 6a^4b^2c^5 + 7a^8b^5c^6) \times (2a^3b^3c^2 + 3a^4b^2c^5 - 6a^7b^4c^3) = 10a^6b^6c^4 + 3a^7b^5c^7 + 14a^{11}b^8c^8 - 18a^8b^4c^{10} + 21a^{12}b^7c^{11} - 30a^{10}b^7c^5 + 36a^{11}b^6c^8 - 42a^{15}b^9c^9$.

106) $(14a^5c^2 - 6a^2bc^2 + c^3) \times (14a^5c^2 + 6a^2bc^2 - c^3) = 196a^{10}c^4 - 36a^4b^2c^4 + 12a^2bc^5 - c^6$.

107) $\left(\frac{a^2}{b^3} + \frac{2c^3d^4}{b^5} - \frac{7c^2}{2a^4b^3}\right) \times \left(\frac{a^2}{b^3} - \frac{2c^3d^4}{b^5} + \frac{7c^2}{2a^4b^3}\right) = \frac{a^4}{b^6} - \frac{4c^6d^8}{b^{10}} + \frac{14c^5d^4}{a^4b^8} - \frac{49c^4}{4a^8b^6}$.

108) $(a^m + b^p - 2c^n) \times (2a^m - 3b) = 2a^{2m} + 2a^m b^p - 4a^m c^n$
$- 3a^m b - 3b^{p+1} + 6bc^n.$

109) $(2a^{3-2m} b^{n+3} + 3a^{m+1} b^{n+2} + c^p) \times (a^{m-1} b^{1-2m} - ca^p)$
$= 2a^{2-m} b^{n-2m+4} + 3a^{2m} b^{n-2m+3} + a^{m-1} b^{1-2m} c^p$
$- 2ca^{p-2m+3} b^{n+3} - 3ca^{p+m+1} b^{n+2} - a^p c^{p+1}.$

110) $(x^{-3p} + 3a^m x^{-2p} - 10a^{2m} x^{-p}) \times (a^2 x^q + 5a^{m+2} x^{q+p}$
$- 2a^{2m+2} x^{q+2p}) = a^2 x^{q-3p} + 8a^{m+2} x^{q-2p}$
$+ 3a^{2m+2} x^{q-p} - 56a^{3m+2} x^q + 20a^{4m+2} x^{q+p}.$

111) $(3a^{4-3m} bc^{m-2} + 17a^{-3} b^{m+1}) \times (3a^{6m-2} b^{2m} c^{3-4m} - 8)$
$= 9a^{3m+2} b^{2m+1} c^{1-3m} + 51a^{6m-5} b^{3m+1} c^{3-4m}$
$- 24a^{4-3m} bc^{m-2} - 136a^{-3} b^{m+1}.$

112) $[(a-1)x^2 + (a^2 - a)x - a] \times [(a+1)x^2 - a^2 x]$
$= (a^2 - 1)\, x^4 + (a^2 - a)\, x^3 - (a^4 - a^3 + a^2$
$+ a)\, x^2 + a^3 x.$

113) $$\left\{ \begin{array}{l|l} a^2 & x^2 + a^3 x - a^2 b^2 \\ -ab & \end{array} \right\} \times \left\{ \begin{array}{l|l|l} a^2 & x^2 - a^2 b & x + b^4 \\ +b^2 & -ab^2 & \end{array} \right\} =$$
$$= \begin{array}{l|l|l|l|l} a^2 & x^4 + a^5 & x^3 - a^5 b & x^2 + a^4 b^3 & x - a^2 b^6. \\ -a^3 b & -a^4 b & -a^4 b^2 & +2a^3 b^4 & \\ +a^2 b^2 & +a^3 b^2 & +a^2 b^4 & & \\ -ab^3 & +a^2 b^3 & -ab^5 & & \end{array}$$

114) $$\left\{ \begin{array}{l|l|l} 2b & a^2 - 4b^2 & a + 8b^3 \\ -1 & +2b & -4b^2 \\ & -1 & \end{array} \right\} \times \left\{ \begin{array}{l|l} 2b & a - 4b^2 \\ +1 & +1 \end{array} \right\} =$$
$$= \begin{array}{l|l|l|l} 4b^2 & a^3 - 16b^3 & a^2 + 32b^4 & a - 32b^5 \\ -1 & +8b^2 & -16b^3 & +16b^4. \\ & -2 & -4b^2 & \end{array}$$

115) $$\left\{ \begin{array}{l|l} 2b & a - 4b^2 \\ +c & +c^2 \end{array} \right\} \times \left\{ \begin{array}{l|l} 2b & a^2 - 4b^2 \\ -c & -2bc \\ & -c^2 \end{array} \right\} =$$
$$= \begin{array}{l|l|l|l} 4b^2 & a^3 - 16b^3 & a^2 + 32b^4 & a - 32b^5 \\ -c^2 & +4b^2 c & -8b^3 c & +16b^4 c \\ & +2bc^2 & -4b^2 c^2 & +8b^4 c \\ & +2c^3 & +2bc^3 & -4b^2 c^3. \\ & & -c^4 & \end{array}$$

Формулы 86, 87, 88 заключаютъ въ себѣ важныя предложенія; какъ ихъ выразить словами?

---

5. Дѣленіе.

1) $a : b = \frac{a}{b}$

2) $-a : b = -\frac{a}{b}$

3) $a : -b = -\frac{a}{b}$

4) $-a : -b = \frac{a}{b}$

5) $5a : 3b = \frac{5a}{3b}$.

6) $-16a : 8b = -\frac{2a}{b}$.

7) $12a : -4b = -\frac{3a}{b}$

8) $-14a : -4b = \frac{7a}{2b}$.

9) $abc : a = bc$.

10) $abc : ad = \frac{bc}{d}$.

11) $8fmn : -2fgm = -\frac{4n}{g}$.

12) $-12abcde : -8acd = \frac{3bc}{2}$.

13) $6abde : -2bf = -\frac{3ade}{f}$.

14) $27a^3b^2cfg : -18abcghk = -\frac{3a^2bf}{2hk}$.

15) $35abfgm : 5a^2bf^2gmn = \frac{7}{afn}$.

16) $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$

17) $\frac{3afx}{bc} : \frac{2fx^2}{5cde} = \frac{15ade}{2bx}$.

18) $3fm : -\frac{3am}{5bg} = -\frac{5bfg}{a}$.

19) $\frac{2ay}{5bcx} : 3ac = \frac{2y}{15bc^2x}$.

20) $\frac{1}{7fg^2l} : \frac{1}{4fln} = \frac{4n}{7g^2}$.

21) $\frac{3}{4}ac : \frac{5}{6}abd = \frac{9c}{10bd}$.

22) $a^m : a^n = a^{m-n}$.

23) $a^m : a^n = a^{m+n}$.

24) $a^{-m} : a^n = a^{-m-n} = a^{-(m+n)}$.

25) $a^{-m} : a^{-n} = a^{-n-m}$.

26) $8a^{10} : 2a^4 = 4a^6.$

27) $\frac{7}{3}a^3 : \frac{2}{5}a^7 = \frac{35}{6}a^{-4} = \frac{35}{6a^4}.$

28) $\frac{14}{5}a^{-8} : -3a = -\frac{14}{15}a^{-9} = -\frac{14}{15a^9}.$

29) $ca^{18} : da^{-6} = \frac{ca^{24}}{d}.$

30) $6(a+b)^{-9} : 4(a+b)^{-5} = \frac{3}{2}(a+b)^{-4} = \frac{3}{2(a+b)^4}.$

31) $\frac{5}{3}a^{-7}b^3c : \frac{1}{2}a^{-9}b^{-5}c^3f = \frac{10a^2b^8}{3c^2f}.$

32) $(a+x)^2(a+y)^{-3} : (a+x)^{-4}(a+y)^{-7} = (a+x)^6(a+y)^4.$

33) $-3a^mb^n : -4a^pb^qc^r = \frac{3a^{m-p}b^{n-q}}{4c^r}.$

34) $-\frac{5c^2a^{-m}b^n}{8} : 3cd^5a^pb^{-q} = -\frac{5cb^{n+q}}{24d^5a^{m+p}}.$

35) $\frac{3a^5d}{2b^3} : \frac{b^5}{4a^2c^7} = \frac{6a^5c^7d}{b^8}.$

36) $\frac{2c^5(1+z^2)^2}{d^7z^9} : \frac{5c^8f^5(1+z^2)^{-6}}{2d^9z^5} = \frac{4d^2(1+z^2)^8}{5c^5f^5z^4}.$

37) $\frac{2x^{5n-8m}y^{2n-3}}{7a^mb^5c} : \frac{4x^{1-3m}}{3ab^{n-1}y^3} = \frac{3b^{n-4}y^{2n+2}x^{3n-7}}{14a^{m-1}c}.$

38) $\left(3ac - 2ade - f + \frac{c}{d}\right) : 2a = \frac{3c}{2} - de - \frac{f}{2a} + \frac{c}{2ad}.$

39) $(18acf - 6bdef - 2ad) : 3adf = \frac{6c}{d} - \frac{2be}{a} - \frac{2}{3f}.$

40) $(8a^2 - 6ab + 4c + 1) : -2a = -4a + 3b - \frac{2c}{a} - \frac{1}{2a}.$

41) $(12acfg - 4af^2g + 3fg^2h) : 4a^2b^2fg = \frac{3c}{ab^2} - \frac{f}{ab^2} + \frac{3gh}{4a^2b^2}.$

42) $\left(\frac{a}{b} + \frac{fd}{2c} - 3ac + 7\right) : \frac{3c}{d} = \frac{ad}{3bc} + \frac{fd^2}{6c^2} - ad + \frac{7d}{3c}.$

43) $(ab - ac) : (b - c) = a.$

44) $(ac - bc + ad - bd) : (a - b) = c + d.$

45) $(4a^2 + 6ab - 4ax + 9bx - 15x^2) : (2a + 3x) = 2a + 3b - 5x.$

46) $(14af - 21bf + 7cf + 6ag - 9bg + 3cg) : (7f + 3g) = 2a - 3b + c.$

47) $4x^3 + 4x^2 - 29x + 21) : (2x - 3) = 2x^2 + 5x - 7.$

48) $\left(\frac{3}{2}x^3 - \frac{5}{4}x^2 - 8x + 9\right) : \left(\frac{1}{2}x - 1\right) = 3x^2 + \frac{7}{2}x - 9.$

49) $(a^2 + ab + 2ac - 2b^2 + 7bc - 3c^2) : (a + 2b - c) = a - b + 3c.$

50) $(12a^2 + 26ab - 36ac + 18ad - 10b^2 + 29bc - 6bd - 21c^2 + 9cd) : (6a - 2b + 3c) = 2a + 5b - 7c + 3d.$

51) $(119c^2 - 200cd + 408ce - 113cf - 39d^2 + 72de + 37df - 96ef + 20f^2) : (17c + 3d - 4f) = 7c - 13d + 24e - 5f.$

52) $\left(3a^2 - \frac{7ab}{2} - \frac{21ac}{4} - \frac{5b^2}{2} + \frac{83bc}{8} - \frac{3c^2}{2}\right) : \left(3a - 5b + \frac{3c}{4}\right) = a + \frac{b}{2} - 2c.$

53) $\left(2f^2 - \frac{55fh}{12} + \frac{29fx}{9} + \frac{21h^2}{8} - \frac{15hx}{4} + \frac{x^2}{3}\right) : \left(\frac{2f}{3} - \frac{3h}{4} + x\right) = 3f - \frac{7h}{2} + \frac{x}{3}.$

54) $(30a^2b - 6a^2c + 75ab^2 - 15abc) : (15ab - 3ac) = 2a + 5b.$

55) $(36a^2b - 63ab^2 + 20b^3) : (12ab - 5b^2) = 3a - 4b.$

56) $(72x^4 - 78x^3y - 10x^2y^2 + 17xy^3 + 3y^4) : (6x^2 - 4xy - y^2) = 12x^2 - 5xy - 3y^2.$

57) $\left(\frac{1}{2}x^4 - \frac{11}{12}x^3 + \frac{41}{8}x^2 - \frac{23}{4}x + 6\right) : \left(\frac{2}{3}x^2 - \frac{5}{6}x + 1\right) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{4}x + 6.$

58) $\left(\frac{15a^2}{2} - \frac{113ab}{6} + 9ac + 2b^2 - bc\right) : \left(\frac{5a}{4} - 3b + \frac{3c}{2}\right)$
$= 6a - \frac{2b}{3}.$

59) $\left(-\frac{5x^2}{9} + \frac{11xy}{3} - \frac{10xz}{3} + \frac{15y^2}{4} + 25yz\right) : \left(-\frac{2}{3}x + 5y\right)$
$= \frac{5x}{6} + \frac{3y}{4} + 5z.$

60) $(18a^2 + 33ab + 42ac - 12ad - 30b^2 + 124bc + 8bd$
$- 16c^2 - 32cd) : (6a + 15b - 2c - 4d) = 3a$
$- 2b + 8c.$

61) $(108a^2 - 33ac - 9ad - 9ae - 24ab + 10bc + 2bd$
$+ 2be - 5c^2 - cd - ce) : (12a - 5c - d$
$- e) = 9a - 2b + c.$

62) $\left(\frac{5}{2}xy + \frac{85}{9}y^2 - \frac{223}{54}yz - \frac{10}{9}yu - \frac{3}{4}xz + \frac{7}{18}z^2 + \frac{uz}{3}\right)$
$: \left(\frac{3}{2}x + \frac{17}{3}y - \frac{7}{9}z - \frac{2}{3}u\right) = \frac{5}{3}y - \frac{1}{2}z.$

63) $(- 75a^2bfx^2 + 65a^2cxy + 60abxy^2 - 65axz$
$+ 180abfx^2y - 156acxy^2 - 144bxy^3 + 156xyz)$
$: (15abfx - 12by^2 - 13acy + 13z) = -5ax + 12xy.$

64) $\left(\frac{a^2}{bc} - \frac{2a}{d} + \frac{ac}{be} + \frac{bc}{d^2} - \frac{c^2}{de}\right) : \left(\frac{a}{b} - \frac{c}{d}\right) = \frac{a}{c}$
$- \frac{b}{d} + \frac{c}{e}.$

65) $\left(\frac{5a^2x}{b} - \frac{5aby}{c} + 5ad - ax + \frac{b^2y}{c} - bd\right) : \left(\frac{ax}{b}$
$- \frac{by}{c} + d\right) = 5a - b.$

66) $\left(\frac{a^2x^3}{bd} + \frac{abx^2}{c^2d} - \frac{acx^2}{d^2} - \frac{b^2x}{cd^2} + \frac{a^2x}{bc} - \frac{a}{d}\right) : \left(\frac{ax}{c} - \frac{b}{d}\right)$
$= \frac{acx^2}{bd} + \frac{bx}{cd} + \frac{a}{b}.$

67) $(a^2 - b^2) : (a - b) = a + b.$

68) $(a^4 - 9a^2b^2 - 6abc^2 - c^4) : (a^2 - 3ab - c^2) = a^2$
$+ 3ab + c^2.$

69) $(a^4 - b^4) : (a - b) = a^3 + a^2b + ab^2 + b^3.$

70) $32a^5 + b^5) : (2a + b) = 16a^4 - 8a^3b + 4a^2b^2 - 2ab^3 + b^4.$

71) $\left(\frac{9a^2b^2}{4c^2} - \frac{25f^2m^2}{g^2} + \frac{70dfm}{g} - 49d^2\right) : \left(\frac{3ab}{2c} + \frac{5fm}{g} - 7d\right) = \frac{3ab}{2c} - \frac{5fm}{g} + 7d.$

72) $(6a^3b^2 - 10a^2f + 7a^4bx) : 2a^2 = 3ab^2 - 5f + \frac{7}{2}a^2bx.$

73) $\left(\frac{3}{4}a^2x^5 - \frac{7}{9}ax^3 + 3ab^2x\right) : \frac{2}{3}a^2x^3 = \frac{9}{8}x^2 - \frac{7}{6a} + \frac{9b^2}{2ax^2}.$

74) $\left(\frac{3a^2b^6}{4} - \frac{5ac}{b^7} + 2a^3c^2 - \frac{2a^2c^2}{5b(a+y)^2}\right) : -\frac{2a^5b^2}{3c} = -\frac{9b^4c}{8a^5} + \frac{15c^2}{2a^4b^9} - \frac{3c^5}{a^2b^2} + \frac{3c^5}{5a^5b^2(a+y)^2}.$

75) $(bc^3 - c^3x) : (b - x) = c^3.$

76) $(a^2 + 2ab + b^2) : (a + b) = a + b.$

77) $(a^3 + a^2b - ab^2 - b^3) : (a - b) = a^2 + 2ab + b^2.$

78) $(3a^5 + 16a^4b - 33a^3b^2 + 14a^2b^3) : (a^2 + 7ab) = 3a^3 - 5a^2b + 2ab^2.$

79) $(a^7 - 6a^6b^3 + 14a^5b^6 - 12a^4b^9) : (a^3 - 2a^2b^3) = a^4. - 4a^3b^3 + 6a^2b^6.$

80) $(a^4 - 2a^2b^2 + b^4) : (a^2 - b^2) = a^2 - b^2.$

81) $[a^2bx^8 - (a^3b - a^5)\,x^7 - 8a^6x^6 + 7a^7x^5] : (a^2x^2 - a^3x) = bx^6 + a^3x^5 - 7a^4x^4.$

82) $(-a^8b^4 + 15a^{11}b^5 - 48a^{14}b^6 - 20a^{17}b^7) : (10a^9b^2 - a^6b) = a^2b^3 - 5a^5b^4 - 2a^8b^5.$

83) $(a^8 - 16z^8) : (a^2 - 2z^2) = a^6 + 2a^4z^2 + 4a^2z^4 + 8z^6.$

84) $(2a^4 - 13a^3b + 31a^2b^2 - 38ab^3 + 24b^4) : (2a^2 - 3ab + 4b^2) = a^2 - 5ab + 6b^2.$

85) $(4c^4 - 9b^2c^2 + 6b^3c - b^4) : (2c^2 - 3bc + b^2) = 2c^2 + 3bc - b^2.$

86) $\left(\frac{3}{4}x^5 - 4x^4 + \frac{77}{8}x^3 - \frac{43}{4}x^2 - \frac{33}{4}x + 27\right) : \left(\frac{1}{2}x^2 - x + 3\right) = \frac{3}{2}x^3 - 5x^2 + \frac{1}{4}x + 9.$

87) $(-1+a^3n^3) : (-1+an) = 1+an+a^2n^2.$

88) $(3a^4b^{12} - 8a^7b^8 - \frac{51}{2}a^{10}b^6 + \frac{5}{4}a^{10}b^4 + \frac{17}{4}a^{13}b^2)$
$: \left(\frac{3}{2}a^3b^5 - \frac{1}{4}a^6b\right) = 2ab^7 - 5a^4b^3 - 17a^7b.$

89) $5a^5b^3c^5 - 22a^4b^3c^6 + 5a^3b^3c^7 + 12a^2b^3c^8 - 7a^2b^2c^8$
$+ 28ab^2c^9) : (a^2bc^2 - 4abc^3) = 5a^3b^2c^3$
$- 2a^2b^2c^4 - 3ab^2c^5 - 7bc^6.$

90) $\left(\frac{a^7b^2}{5} - \frac{47a^6b^3}{40} + \frac{9a^5b^4}{2} - 12a^4b^5\right) : \left(\frac{2a^3b^2}{5} - \frac{3a^2b^3}{4}\right.$
$\left. + 6ab^4\right) = \frac{1}{2}a^4 - 2a^3b.$

91) $(-2a^{-8}x^5 + 17a^{-4}x^6 - 5x^7 - 24a^4x^8) : (2a^{-3}x^3$
$- 3ax^4) = -a^{-5}x^2 + 7a^{-1}x^3 + 8a^3x^4.$

92) $\left(\frac{a^3c}{b^5} + \frac{a^4c}{b^4} - \frac{7a^5c}{b^3} - \frac{3a^6c}{b^2} + \frac{a^2c^3}{b^2} - \frac{2a^3c^3}{b} - a^4c^3\right)$
$: \left(\frac{a}{b^3} + \frac{3a^2}{b^2} + c^2\right) = \frac{a^2c}{b^2} - \frac{2a^3c}{b} - a^4c.$

93) $(a^3d^3 - 3a^2cd^3 + 3ac^2d^3 - c^3d^3 + a^2c^2d^2 - ac^3d^2)$
$: (a^2d^2 - 2acd^2 + c^2d^2 + ac^2d) = ad - cd.$

94) $(a^6 + 2a^3z^3 + z^6) : (a^2 - az + z^2) = a^4 + a^3z$
$+ az^3 + z^4.$

95) $(\frac{1}{3} - 6z^2 + 27z^4) : (\frac{1}{3} + 2z + 3z^2) = 1 - 6z + 9z^2.$

96) $(a^6 - 16a^3x^3 + 64x^6) : (a^2 - 4ax + 4x^2) = a^4 + 4a^3x$
$+ 12a^2x^2 + 16ax^3 + 16x^4.$

97) $a^{3m-2n}b^{2p}c - a^{2m+n-1}b^{1-p}c^n + a^{-n}b^{-1}c^m$
$+ a^{3m-n}b^{3p+2}c^n - a^{2m+2n-1}b^3c^{2n-1}$
$+ b^{p+1}c^{m+n-1}) : (a^{-n}b^{-p-1} + bc^{n-1})$
$= a^{3m-n}b^{3p+1}c - a^{2m+2n-1}b^2c^n + b^pc^m.$

98) $(a^{m+n}\ b^{n} - 4a^{m+n-1}\ b^{2n} - 27a^{m+n-2}\ b^{3n} + 42a^{m+n-3}\ b^{4n}) : (a^{n}b^{n} - 7a^{n-1}\ b^{2n}) = a^{m} + 3a^{m-1}\ b^{n} - 6a^{m-2}\ b^{2n}.$

99) $(a^{n} - b^{n}) : (a - b) = a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^{2} + \ldots$
$\ldots + b^{n-1}.$

100)
$$\left\{\begin{array}{r|r|r|l} 12b^2 & a^3 + 23b^3 & a^2 + 10b^4 & a + 6b^2 \\ -29bc & -40b^2c & -6b^3c & \\ +15c^2 & -9bc^2 & -16b^2c^3 & \\ & +40c^3 & -15c & \\ & & +9b & \end{array}\right\} : \left\{\begin{array}{r|l} 3b & a + 2b^2 \\ -5c & \end{array}\right\}$$

$$= \begin{array}{r|r|l} 4b & a^2 + 5b^2 & a + 3. \\ -3c & -3bc & \\ & -8c^2 & \end{array}$$

101)
$$\left\{\begin{array}{r|r|r|r|l} a^4b & h^5 - 3a^3b^2 & h^4 + 2a^4b & h^3 + 10a^2b^3 & h^2 \\ -3a^3b^2 & +5a^2b^3 & -4a^3b^2 & +2a^2b^2 & \\ +2a^2b^3 & +12a^2b^2 & -2a^2b^2c & +a^2k & \\ +2a^2bc & -11ab^3 & -a^2b & +3ab^2 & \\ -4ab^2c & -5ab^4 & -15ab^4 & -2abk & \\ & +10b^3c & +4ab^3c & -5b^2 & \\ & +2b^2c & -3ab^3 & -2b^3c & \\ & & +ab^2 & -10b^4c & \\ & & +5b^3 & & \\ & & -2bc & & \\ & & +25b^4 & & \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r|l} -2a^2b & h - k \\ +2b^2c & \\ +5b^2k & \\ +bk & \end{array}\right\} : \left\{\begin{array}{r|r|r|l} a^2b & h^3 - 3ab^2 & h^2 + 2a^2b & h + k \\ -ab^2 & +5b^2 & -2b^2c & \\ +2bc & & & \end{array}\right\} =$$

$$\begin{array}{r|r|l} a^2 & h^2 + 5b^2 & h - 1. \\ -2ab & +b & \end{array}$$

$$
102)\left\{\begin{array}{r|l|l|l|l}
12m^4np & a^6 & +22m^3np^2 & a^5 & +15m^2npq \\
-\ 6m^3nq & & +12m^2n^2q^2 & & -14m^2np^3 \\
+\ 4m^2p^2 & & -26m^2npq & & +\ 3m^2np^2 \\
-\ 3m^2p^2n & & -\ 2m^2p^3 & & +\ 6mnp^2q \\
-\ 2m^2pq & & +\ 4mnp^3 & & +28mn^2pq^2 \\
+\ 4mnpq & & +\ 4mnpq^2 & & +\ 4m^2p \\
 & & +\ 6mnq^2 & & +\ mp^5 \\
 & & -\ 8n^2pq^2 & & +\ 5np^2q \\
 & & & & -\ 2mq \\
 & & & & -\ 2np^3 \\
 & & & & +10np^2q \\
 & & & & -12n^2q^3
\end{array}\right.
$$

$$
\begin{array}{r|l|l|l|l|l|l}
4m^4np & a^4 & +\ 3m^2np^2 & a^3 & -\ 6cm^2n & a^2 & -\ 14mnpc \\
-\ 2m^3nq & & +15m^2npq & & +35mnp^2q & & +\ 6nqc \\
+\ 2m^2p^2 & & +\ 5mp^2q & & +\ 4mnp^3 & & +\ 5pq \\
-\ 3mp^2n & & -\ 2mp^2 & & -\ 2cmp & & +\ p^2 \\
-\ 2mpq & & +\ mp^3 & & -15npq^2 & & \\
+\ 4mnq & & -\ 2np^3 & & -\ 3np^2q & & \\
 & & -10np^2q & & +\ 4cnp & & \\
 & & +\ 4nq^2 & & & &
\end{array}
\quad : \quad
\left\{\begin{array}{r|l}
3m^2n & a^2 \\
-\ 2np & \\
+\ mp &
\end{array}\right.
$$

$$
\left.\begin{array}{r|l}
+\ 7mnp & a \\
-\ 3nq &
\end{array}\right\} + 1 \quad = \quad
\begin{array}{r|l|l|l}
4m^2p & a^4 & -2mp^2 & a^3 \\
-2mq & & +4nq^2 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|l}
+\ 5pq & a \\
+\ p^2 &
\end{array} - 2c.
$$

Случаи, когда дѣлимое не дѣлится на дѣлителя на-цѣло.

$$
\begin{aligned}
1)\ 1 : (1-b) &= 1 + \frac{b}{1-b} \\
&= 1 + b + \frac{b^2}{1-b} \\
&= 1 + b + b^2 + \frac{b^3}{1-b} \\
&= 1 + b + b^2 + b^3 + \frac{b^4}{1-b} \\
&= 1 + b + b^2 + b^3 + b^4 + \ldots\ldots
\end{aligned}
$$

$$2)\ 1 : (1+b) = 1 - \frac{b}{1+b}$$
$$= 1 - b + \frac{b^2}{1+b}$$
$$= 1 - b + b^2 - \frac{b^3}{1+b}$$
$$= 1 - b + b^2 - b^3 + \frac{b^4}{1+b}$$
$$= 1 - b + b^2 - b^3 + b^4 - \ldots\ldots$$

$$3)\ c : (a-b) = \frac{c}{a} + \frac{bc}{a(a-b)}$$
$$= \frac{c}{a} + \frac{bc}{a^2} + \frac{b^2c}{a^2(a-b)}$$
$$= \frac{c}{a} + \frac{bc}{a^2} + \frac{b^2c}{a^3} + \frac{b^3c}{a^3(a-b)}$$
$$= \frac{c}{a} + \frac{bc}{a^2} + \frac{b^2c}{a^3} + \frac{b^3c}{a^4} + \ldots\ldots$$

$$4)\ c : (a+b) = \frac{c}{a} - \frac{bc}{a(a+b)}$$
$$= \frac{c}{a} - \frac{bc}{a^2} + \frac{b^2c}{a^2(a+b)}$$
$$= \frac{c}{a} - \frac{bc}{a^2} + \frac{b^2c}{a^3} - \frac{b^3c}{a^3(a+b)}$$
$$= \frac{c}{a} - \frac{bc}{a^2} + \frac{b^2c}{a^3} - \frac{b^3c}{a^4} + \ldots\ldots$$

$$5)\ (1+x) : (1-x) = 1 + \frac{2x}{1-x}$$
$$= 1 + 2x + \frac{2x^2}{1+x}$$
$$= 1 + 2x + 2x^2 + \frac{2x^3}{1-x}$$
$$= 1 + 2x + 2x^2 + 2x^3 + \ldots\ldots$$

$$6)\ \frac{a}{1+x} = a - ax + ax^2 - ax^3 + ax^4 - \ldots\ldots$$

$$7)\ \frac{a}{1-x} = a + ax + ax^2 + ax^3 + ax^4 + \ldots\ldots$$

$$8)\ \frac{a}{x+1} = \frac{a}{x} - \frac{a}{x^2} + \frac{a}{x^3} - \frac{a}{x^4} + \ldots\ldots$$

9) $\frac{a}{x-1} = \frac{a}{x} + \frac{a}{x^2} + \frac{a}{x^3} + \frac{a}{x^4} + \ldots\ldots$

10) $\frac{a+x}{b+x} = \frac{a}{b} - \frac{a-b}{b^2}\,x + \frac{a-b}{b^3}\,x^2 - \frac{a-b}{b^4}\,x^3 + \ldots\ldots$

11) $\frac{a-x}{b-x} = \frac{a}{b} + \frac{a-b}{b^2}\,x + \frac{a-b}{b^3}\,x^2 + \frac{a-b}{b^4}\,x^3 + \ldots\ldots$

12) $\frac{x+a}{x-b} = 1 + \frac{a+b}{x} + \frac{b(a+b)}{x^2} + \frac{b^2(a+b)}{x^3} + \ldots\ldots$

---

6. Степени степеней.

1) $\left[\left((a^m)^n\right)^p\right]^q = a^{mnpq}.$

2) $\left[\left((a^{-m})^{-n}\right)^p\right]^q = a^{mnpq}.$

3) $\left[\left((a^{-m})^{-n}\right)^{-p}\right]^{-q} = a^{mnpq}.$

4) $\left[\left((a^m)^{-n}\right)^{-p}\right]^{-q} = a^{-mnpq}.$

5) $\left[(a^3bc^2)^5\right]^6 = a^{90}\,b^{30}\,c^{60}.$

6) $(a^{-2}b^3\,c^{-5}\,f^6x^{-1})^{-3} = a^6b^{-9}\,c^{15}\,f^{-18}x^3.$

7) $(a^mb^{-n}c^pd)^r = a^{mr}b^{-nr}c^{pr}d^r.$

8) $(a^{3m-n}\,f^{2n-1}x^n)^{-3m} = a^{3mn-9mm}\,f^{3m-6mn}\,x^{-3mn}.$

9) $[a^3\,(a+b)^2]^m = a^{3m}\,(a+b)^{2m}.$

10) $\left(\frac{a^mb^nc^pd^{-q}}{f^ng^{-m}}\right)^{-r} = \frac{a^{-mr}b^{-nr}c^{-pr}d^{qr}}{f^{-nr}g^{mr}}.$

11) $\left(\frac{a^4b^5}{c^3df}\right)^4 = \frac{a^{16}b^{20}}{c^{12}d^4f^4}.$

12) $\left[\left(\frac{a^2b^3}{cd^5}\right)^{-1}\right]^{-2m} = \frac{a^{4m}b^{6m}}{c^{2m}d^{10m}} = \left(\frac{a^4b^6}{c^2d^{10}}\right)^m.$

13) $(-a^2)^5 = -a^{10}.$

14) $(-b^{-3})^4 = b^{-12}.$

15) $\left[\left((-a)^3\right)^4\right]^5 = a^{60}.$

16) $[(-a)^{-3}]^{-5} = -a^{15}$.

17) $[(-a)^{-4}]^{-6} = a^{24}$.

18) $(-a)^{2m} = a^{2m}$.

19) $(-a)^{2m+1} = -a^{2m+1}$.

20) $\left[\left(-\frac{a}{b}\right)^3\right]^{-4} = \frac{b^{12}}{a^{12}}$.

ПРИВЕДЕНІЯ КЪ ПРОСТѢЙШЕМУ ВИДУ.

1. Приведеніе къ простѣйшему виду чрезъ соединеніе дробей.

1) $\frac{a}{b} + c = \frac{a + bc}{b}$.

2) $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$.

3) $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} + \frac{e}{f} = \frac{adf + bcf + bde}{bdf}$.

4) $\frac{3a}{5b} + \frac{c}{4d} + h = \frac{12ad + 5bc + 20bdh}{20bd}$.

5) $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} - \frac{e}{f} - \frac{g}{h} - k = \frac{adfh + bcfh - bdeh - bdfg - bdfhk}{bdfh}$

6) $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{bc - ac + ab}{abc}$.

7) $\frac{3a}{4b} + \frac{5f}{8l} - \frac{x}{7y} = \frac{42aly + 35bfy - 8blx}{56bly}$.

8) $\frac{af}{4bg} - \frac{5cd}{12bh} + \frac{2}{3} = \frac{3afh - 5cdg + 8bgh}{12bgh}$.

9) $\frac{a}{4bcd} - \frac{h}{2bcg} + \frac{2cd}{5bg} = \frac{5ag - 10dh + 8c^2d^2}{20bcdg}$.

10) $\frac{2a}{3bc} + \frac{5df}{8b^2c} - \frac{deg}{6b^2c^2} = \frac{16abc + 15cdf - 4deg}{24b^2c^2}$.

11) $a - b - \frac{d}{ef} - \frac{c}{eg} = \frac{(a-b)efg - dg - cf}{efg}$.

12) $e - f - \frac{g^3}{2ef} + \frac{f^m}{3eg} = \frac{6efg(e-f) - 3g^4 + 2f^{m+1}}{6efg}$.

13) $\frac{a^2d}{3b^7c^3} - \frac{3ad}{2b^4c^2} - \frac{b^2}{cd} = \frac{2a^2d^2 - 9ab^3cd^2 - 6b^9c^2}{6b^7c^3d}.$

14) $\frac{a}{b^n} + \frac{c}{b^{n-r}} + \frac{d}{b^{n-2r}} = \frac{a + cb^r + db^{2r}}{b^n}.$

15) $\frac{a}{x^n} - \frac{c}{x^{n-1}} + \frac{d}{x^{n-r-s}} = \frac{a - cx + dx^{r+s}}{x^n}.$

16) $c + 2ab - 3ac - \frac{b^2c - 5ab^2 + ca^3}{b^2 - bc} = \frac{2ab^3 - bc^2 + 3abc^2 - a^3}{b^2 - bc}.$

17) $\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} = a.$

18) $\frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2} = b.$

19) $\frac{13a - 5b}{4} - \frac{7a - 2b}{6} - \frac{3a}{5} = \frac{89a - 55b}{60}.$

20) $\frac{3a - 4b}{7} - \frac{2a - b - c}{3} + \frac{15a - 4c}{12} = \frac{85a - 20b}{84}.$

21) $\frac{3a + 2b}{c} - \frac{5bd - 2a - 3d}{4cd} = \frac{12ad + 3bd + 2a + 3d}{4cd}.$

22) $\frac{a}{b} + \frac{a - 3b}{cd} + \frac{a^2 - b^2 - ab}{bcd} = \frac{acd - 4b^2 + a^2}{bcd}.$

23) $cf + \frac{a^2}{c^3f} - \frac{a - b - c^2}{bc^3f^3} = \frac{bc^6f^4 + a^2bf^2 - a + b + c^2}{bc^3f^3}.$

24) $\frac{3a + b + x}{5a} - \frac{2a + b}{3b} + \frac{7a - 2b}{9a} = \frac{47ab - b^2 + 9bx - 30a^2}{45ab}.$

25) $\frac{3a^m(a+b)^{m-2}}{c^{m+2}d^{m-3}f^4} - \frac{a^{3m} - 2acd^{4-m}}{c^{m+1}df^n(a+b)^2} - \frac{1}{c^{m-2}f^{n-3}\ (a+b)^2}$

$= \frac{3a^mf^{n-4}(a+b)^m - ca^{3m}d^{m-4} + 2ac^2 - c^4f^3d^{m-3}}{c^{m+2}d^{m-3}f^n(a+b)^2}.$

26) $\frac{(a+x)^{\frac{p}{q}-1}}{3b^2(c+x)^{\frac{m}{n}}} - \frac{b^{\frac{2}{3}}x^2(c+x)^{-\frac{m}{n}}}{(a+x)^{1-\frac{p}{2q}}} = \frac{(a+x)^{\frac{p}{2q}} - 3b^{\frac{8}{3}}x^2}{3b^2(c+x)^{\frac{m}{n}}(a+x^{1-\frac{p}{2q}}}.$

27) $\frac{a}{a+z} + \frac{z}{a-z} = \frac{a^2 + z^2}{a^2 - z^2}.$

28) $\frac{f+g}{3f-2g} - \frac{5f-2g}{2f-9g} = \frac{9fg - 13f^2 - 13g^2}{6f^2 - 31fg + 18g^2}.$

29) $\frac{a}{b+x} - \frac{c}{x} + \frac{3c}{4x} + 2b = \frac{8bx^2 + (8b^2 + 4a - c)x - bc}{4bx + 4x^2}.$

30) $\frac{3a + 2x}{a+x} - \frac{5a - x}{a-x} + \frac{a}{2x} = \frac{a^3 - 4a^2x - 11ax^2 - 2x^3}{2x(a^2 - x^2)}.$

31) $\frac{az}{a^2 - z^2} - \frac{a - z}{a + z} = \frac{3az - a^2 - z^2}{a^2 - z^2}.$

32) $$\frac{ac}{a^2-4y^2}+\frac{bd}{ac+2cy}=\frac{ac^2+abd-2bdy}{c(a^2-4y^2)}.$$

33) $$\frac{a^3}{(a+b)^3}-\frac{ab}{(a+b)^2}+\frac{b}{a+b}=\frac{a^3+ab^2+b^3}{(a+b)^3}.$$

34) $$\frac{a^m}{(a+b)^n}+\frac{a^{m-2}b^r}{(a+b)^{n-1}}-\frac{a^{m-3}b^r}{(a+b)^{n-2}}=\frac{a^m-a^{m-2}b^{r+1}-a^{m-3}b^{r+2}}{(a+b)^n}.$$

35) $$\frac{2ax+x^2}{(a-x)^2}-\frac{a^2+5ax}{(a+x)^2}-\frac{x}{a-x}=\frac{2x^4+13a^2x^2-2a^3x-a^4}{(a^2-x^2)^2}.$$

36) $$\frac{a-(n+1)a^{n+1}}{1-a}+\frac{a^2(1-a^n)}{(1-a)^2}=\frac{a-(n+1)a^{n+1}+na^{n+2}}{(1-a)^2}.$$

37) $$\frac{1}{1-z^2}-\frac{1}{m+1+(m-1)z^2}=\frac{m(1+z^2)}{m(1-z^4)+(1-z^2)^2}.$$

38) $$\frac{3}{4(1-x)^2}+\frac{3}{8(1-x)}+\frac{1}{8(1+x)}-\frac{1-x}{4(1+x^2)}$$
$$=\frac{1+x+x^2}{1-x-x^4+x^5}.$$

39) $$\frac{1+2x}{(3-x)(1+x)}+\frac{7}{(2+x)(1-3x)}+\frac{x}{(1+x)(2+x)}$$
$$=\frac{23+16x-30x^2-3x^3}{(3-x)(1+x)(2+x)(1-3x)}.$$

40) $$\frac{3h}{(h-2x)^2}+\frac{2h+x}{(h+x)(h-2x)}-\frac{5}{h+x}=\frac{20hx-22x^2}{(h+x)(h-2x)^2}.$$

---

2. Приведеніе къ простѣйшему виду чрезъ сокращеніе дробей (*).

1) $$\frac{ax+x^2}{3bx-cx}=\frac{a+x}{3b-c}.$$

(*) Для сокращенія дробей, предварительно должно умѣть отыскивать общаго дѣлителя числителя и знаменателя оныхъ. Способъ сей показанъ почти во всѣхъ курсахъ, и потому можно положить что онъ извѣстенъ. Подобный способъ можно приложить и къ алгебраическимъ выраженіямъ, но онъ часто приводитъ къ многосложнымъ выкладкамъ. Равнымъ образомъ и чрезъ разрѣшеніе уравненій можно отыскать множителей, и сей

2) $$\frac{ac^5 - bc^5 - c^7}{3bc^2 + c^4} = \frac{ac - bc^3 - c^5}{3b + c^2}.$$

3) $$\frac{21a^3b^2c - 9ab^3c^2}{15a^2b^2c + 3a^5b^4c^2 - 12ab^2c} = \frac{7a^2 - 3bc}{5a + a^4b^2c - 4}.$$

4) $$\frac{2a^{n+5}b^{m-1}c - 4a^rb^{2m-1}c^2d + 2a^{r+4}b^mc + 6a^{r-1}b^{m-1}c^n}{8a^{r+5}b^{m+2}c^2 - 2a^{r+3}b^mc + 10a^rb^3c^4}$$
$$= \frac{a^n - 2b^mcd + ab + 3a^{-1}c^{n-1}}{4a^5b^3c - a^3b + 5b^{4-m}c^3}.$$

5) $$\frac{14a^2 - 7ab}{10ac - 5bc} = \frac{7a}{5c}.$$

6) $$\frac{12a^3x^4 + 2a^2x^5}{18ab^2x + 3b^2x^2} = \frac{2a^2x^3}{3b^2}.$$

7) $$\frac{6ac + 9bc - 5c^2}{12adf + 18bdf - 10cdf} = \frac{c}{2df}.$$

8) $$\frac{45a^3b^4c + 27a^8b^7cd - 9a^4b^2d^5}{30a^2b^2c^3d^4 + 18a^7b^5c^3d^5 - 6a^3c^2d^7} = \frac{3ab^2}{2c^2d^4}.$$

9) $$\frac{30a^{3n-4}b^rc^{r+2} - 6a^{2n-4}b^3c^rd^{r-1}}{20a^nb^{r-1}c^2d^2 - 4a^{-3}b^2d^{r+1}} = \frac{3a^{2n-1}bc^r}{2d^2}.$$

10) $$\frac{5a^2 + 5ax}{a^2 - x^2} = \frac{5a}{a - x}.$$

11) $$\frac{a^3 - x^3}{(a - x)^2} = \frac{a^2 + ax + x^2}{a - x}.$$

12) $$\frac{n^2 - 2n + 1}{n^2 - 1} = \frac{n - 1}{n + 1}.$$

13) $$\frac{a^3 + (1 + a)ay + y^2}{a^4 - y^2} = \frac{a + y}{a^2 - y}.$$

14) $$\frac{ac + bd + ad + bc}{af + 2bx + 2ax + bf} = \frac{c + d}{f + 2x}.$$

15) $$\frac{6ac + 10bc + 9ad + 15bd}{6c^2 + 9cd - 2c - 3d} = \frac{3a + 5b}{3c - 1}.$$

способъ иногда употребляется съ пользою. Вообще же гораздо легче можно достигнуть сей цѣли, имѣя надлежащій навыкъ и обращая вниманіе на свойство самыхъ выраженій.

16) $\dfrac{n^3-2n^2}{n^2-4n+4}=\dfrac{n^2}{n-2}.$

17) $\dfrac{x^2+2x-3}{x^2+5x+6}=\dfrac{x-1}{x+2}.$

18) $\dfrac{9x^3+53x^2-9x-18}{x^2+11x+30}=\dfrac{9x^2-x-3}{x+5}.$

19) $\dfrac{2x^3+x^2-8x+5}{7x^2-12x+5}=\dfrac{2x^2+3x-5}{7x-5}.$

20) $\dfrac{2x^3+3x^2+x}{x^3-x^2-2x}=\dfrac{2x+1}{x-2}.$

21) $\dfrac{a^3b^3+c^3x^3}{a^2b^2-c^2x^2}=\dfrac{a^2b^2-abcx+c^2x^2}{ab-cx}.$

22) $\dfrac{ax^m-bx^{m+1}}{a^2bx-b^3x^3}=\dfrac{x^{m-1}}{ab+b^2x}.$

23) $\dfrac{2x^3-(3c+d+2)x^2+(3c+d)x}{x^4-x}=\dfrac{2x-3c-d}{x^2+x+1}.$

24) $\dfrac{a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc}{a^2-b^2-c^2-2bc}=\dfrac{a+b+c}{a-b-c}.$

25) $\dfrac{a^2-3ab+ac+2b^2-2bc}{a^2-b^2+2bc-c^2}=\dfrac{a-2b}{a+b-c}.$

26) $\dfrac{(a+b)(a+b+c)(a+b-c)}{2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4}=\dfrac{(a+b)(a+b+c)(a+b-c)}{4b^2c^2-(a^2-b^2-c^2)^2}$

$$=\frac{a+b}{(c+a-b)(b-a+c)}\ (*).$$

ИЗВЛЕЧЕНІЕ КОРНЕЙ И ДѢЙСТВІЯ НАДЪ КОРЕННЫМИ ВЕЛИЧИНАМИ.

Что называется извлеченіемъ корня изъ какого-нибудь числа? и что такое коренная величина? — Бываютъ ли такія

(*) При семъ сокращеніи преподающій имѣетъ случай сдѣлать различныя замѣчанія.

числа, изъ которыхъ корень не можетъ быть выраженъ ни цѣлыми числами, ни обыкновенными дробями? И ежели бываютъ, то какъ они познаются? — Какъ называется коренная величина, которая не можетъ быть выражена ни цѣлымъ числомъ, ни дробью? — Что значитъ соизмѣримая и несоизмѣримая величина? — Ирраціональныя числа, въ отношеніи къ цѣлымъ числамъ и дробямъ, необходимо суть несоизмѣримыя величины? — Будутъ ли же они и между собою несоизмѣримы? Въ какихъ случаяхъ оныя бываютъ соизмѣримы между собою? — Какое сокращеніе можно сдѣлать при сложеніи и вычитаніи коренныхъ величинъ? Что для сего требуется? — Возможно ли сокращеніе коренныхъ величинъ при умноженіи и дѣленіи? Какое именно? — Что должно сдѣлать, чтобы увеличить показателя корня? Съ какою цѣлію дѣлается сіе, ибо вообще выгоднѣе имѣть меньшихъ показателей корня.

---

1. Квадратные и кубическіе корни изъ чиселъ.

a) Квадратные корни.

1) $\sqrt{(256)} = 16.$
2) $\sqrt{(4096)} = 64.$
3) $\sqrt{(61009)} = 247.$
4) $\sqrt{(582169)} = 763.$
5) $\sqrt{(956484)} = 978.$
6) $\sqrt{(57198969)} = 7563.$
7) $\sqrt{(68492176)} = 8276.$
8) $\sqrt{(25836889)} = 5083.$

9) $\sqrt{(236144689)} = 15367.$

10) $\sqrt{(1607448649)} = 40093.$

11) $\sqrt{(780811249)} = 27943.$

12) $\sqrt{(1420913025)} = 37695.$

13) $\sqrt{(285970396644)} = 534762.$

14) $\sqrt{(41605800625)} = 203975.$

15) $\sqrt{(48303584206084)} = 6950078.$

16) $\sqrt{(12088868379025)} = 3476905.$

17) $\sqrt{(5)} = 2,23606.....$

18) $\sqrt{(13)} = 3,60555.....$

19) $\sqrt{(22)} = 4,69041.....$

20) $\sqrt{(96)} = 9,79795.....$

21) $\sqrt{(153)} = 12,36931.....$

22) $\sqrt{(101)} = 10,04987.....$

23) $\sqrt{(7,65)} = 2,76586.....$

24) $\sqrt{(9,6)} = 3,09838.....$

25) $\sqrt{(15,2379)} = 3,90357.....$

26) $\sqrt{(0,056)} = 0,23664.....$

27) $\sqrt{(0,00789)} = 0,08882.....$

28) $\sqrt{(0,003)} = 0,05477.....$

29) $\sqrt{(0,014)} = 0,11832.....$

30) $\sqrt{(\frac{1}{4})} = \frac{1}{2}.$

31) $\sqrt{(\frac{9}{16})} = \frac{3}{4}.$

32) $\sqrt{(\frac{64}{81})} = \frac{8}{9}.$

33) $\sqrt{(\frac{256}{361})} = \frac{16}{19}.$

34) $\sqrt{(\frac{7}{4})} = 1,32287.....$

35) $\sqrt{(\frac{14}{9})} = 1,24721.....$

36) $\sqrt{(11\frac{11}{16})} = 3,41869.....$

37) $\sqrt{(7\frac{13}{36})} = 2,71313.....$

38) $\sqrt{(8\frac{15}{49})} = 2,88203.....$

39) $\sqrt{(\frac{5}{3})} = 1,29099.....$

40) $\sqrt{(\frac{7}{8})} = 0,93541.....$

41) $\sqrt{(\frac{5}{12})} = 0,64549.....$

42) $\sqrt{(\frac{1}{17})} = 0,24253.....$

43) $\sqrt{(10\frac{3}{10})} = 3,20936.....$

b) Кубическіе корни.

1) $\sqrt[3]{(12167)} = 23.$

2) $\sqrt[3]{(884736)} = 96.$

3) $\sqrt[3]{(405224)} = 74.$

4) $\sqrt[3]{(2460375)} = 135.$

5) $\sqrt[3]{(11089567)} = 223.$

6) $\sqrt[3]{(1191016)} = 106.$

7) $\sqrt[3]{(17173512)} = 258.$

8) $\sqrt[3]{(49836032)} = 368.$

9) $\sqrt[3]{(40353607)} = 343.$

10) $\sqrt[3]{(64481201)} = 401.$

11) $\sqrt[3]{(8000000)} = 200.$

12) $\sqrt[3]{(74088000)} = 420.$

13) $\sqrt[3]{(318611987)} = 683.$

14) $\sqrt[3]{(340068392)} = 698.$

15) $\sqrt[3]{(6372783864)} = 1854.$

16) $\sqrt[3]{(7256313856)} = 1936.$

17) $\sqrt[3]{(111980168000)} = 4820.$

18) $\sqrt[3]{(115145914625)} = 4865.$

19) $\sqrt[3]{(18970074963)} = 2667.$

20) $\sqrt[3]{(113028882875)} = 4835.$

21) $\sqrt[3]{(8108486729)} = 2009.$

22) $\sqrt[3]{(12)} = 2,28942.....$

23) $\sqrt[3]{(82)} = 4,34448.....$

24) $\sqrt[3]{(267)} = 6,43927.....$

25) $\sqrt[3]{(551)} = 8,19817.....$

26) $\sqrt[3]{(687)} = 8,82373.....$

27) $\sqrt[3]{(5,8)} = 1,79670.....$

28) $\sqrt[3]{(102,875)} = 4,68565.....$

29) $\sqrt[3]{(28,25)} = 3,04559.....$

30) $\sqrt[3]{(58230,605376)} = 38,76.$

31) $\sqrt[3]{(\frac{1}{8})} = \frac{1}{2}.$

32) $\sqrt[3]{(\frac{27}{64})} = \frac{3}{4}.$

33) $\sqrt[3]{(\frac{343}{512})} = \frac{7}{8}.$

34) $\sqrt[3]{(\frac{726}{125})} = \frac{9}{5}.$

35) $\sqrt[3]{(465\frac{31}{64})} = 7\frac{3}{4}.$

36) $\sqrt[3]{(52034\frac{10}{27})} = 37\frac{1}{3}.$

37) $\sqrt[3]{(\frac{2}{3})} = 0,87358.....$

38) $\sqrt[3]{(\frac{5}{6})} = 0,94103.....$

39) $\sqrt[3]{(\frac{5}{14})} = 0,70949.....$

40) $\sqrt[3]{(3\frac{4}{5})} = 1,56049.....$

41) $\sqrt[3]{(15\frac{2}{3})} = 2,50222.....$

2. Корни изъ буквенныхъ выраженій.

a) Корни изъ простыхъ буквенныхъ выраженій.

1) $\sqrt[m]{(a^{mn})} = a^{n}$.

2) $\sqrt[m]{(a^{-mn})} = a^{-n}$.

3) $\sqrt[m]{(a^{mn}b^{mp}c^{-mq}d^{-mr})} = a^{n}b^{p}c^{-q}d^{-r}$.

4) $\sqrt[m]{\left(\frac{a^{mn}b^{mp}}{c^{mq}d^{mr}f^{ms}}\right)} = \frac{a^{n}b^{p}}{c^{q}d^{r}f^{s}}$.

5) $\sqrt{(9a^{4}b^{2}f^{-12}g^{-8n})} = 3a^{2}bf^{-6}g^{-4n}$.

6) $\sqrt{(\frac{4}{25}\ c^{6}x^{2m+4}y^{4p-8})} = \frac{2}{5}\ c^{3}x^{m+2}y^{2p-4}$.

7) $\sqrt[4]{\left(\frac{a^{8}b^{20}c^{4}}{(a+f)^{4}h^{12}z^{16}}\right)} = \frac{a^{2}b^{5}c}{(a+f)h^{3}z^{4}}$.

8) $\sqrt[3]{\left(\frac{27u^{9}x^{12}(a^{2}+x^{2})^{-6n}}{8b^{-3n}h^{3}}\right)} = \frac{3b^{n}u^{3}x^{4}}{2h^{2}(a^{2}+x^{2})^{2n}}$.

9) $\sqrt[5]{\left(\frac{3^{10}a^{-5}(a+b)^{5}(2+x)^{-10}}{32c^{5}d^{-15}}\right)} = \frac{9d^{3}(a+b)}{2ac(2+x)^{2}}$.

10) $\sqrt[9]{\left(2^{36}a^{45}b^{9} \times \frac{(a+b)^{27}}{a^{9}}\right)} = 2^{4}a^{4}b(a+b)^{3}$.

11) $\sqrt{\left(\frac{a^{2}b^{2}c^{2}}{d^{4}} \times \frac{1}{a^{6}b^{8}f^{4}}\right)} = \frac{c}{a^{2}b^{5}d^{2}f^{2}}$.

b) Квадратные корни изъ сложныхъ буквенныхъ выраженій.

1) $\sqrt{(a^{2}+2ab+b^{2})} = a+b$.

2) $\sqrt{(a^{2}-2ab+b^{2})} = a-b$.

3) $\sqrt{\left(a^{2}-ab+\frac{b^{2}}{4}\right)} = a-\frac{b}{2}$.

4) $\sqrt{(x^{2}+2x+1)} = x+1$.

5) $\sqrt{(f^{6}+6f^{3}x^{4}+9x^{8})} = f^{3}+3x^{4}$.

6) $\sqrt{\left(\frac{9a^{8}}{4}+2a^{4}n^{3}+\frac{4n^{6}}{9}\right)} = \frac{3a^{4}}{2}+\frac{2n^{3}}{3}$.

7) $\sqrt{(\frac{25}{4}\ a^{2}b^{2}-\frac{5}{3}\ abc^{2}+\frac{1}{9}\ c^{4})} = \frac{5}{2}\ ab-\frac{1}{3}\ c^{2}$.

8) $\sqrt{(x^{4}-ax^{3}+\frac{1}{4}\ a^{2}x^{2})} = x^{2}-\frac{1}{2}\ ax$.

9) $\sqrt{(a^{2m} + 2a^m x^n + x^{2n})} = a^m + x^n.$

10) $\sqrt{(a^{2m} - 4a^{m+n} + 4a^{2n})} = a^m - 2a^n.$

11) $\sqrt{\left(\frac{a^2}{b^2} - \frac{4a}{3c} + \frac{4b^2}{9c^2}\right)} = \frac{a}{b} - \frac{2b}{3c}.$

12) $\sqrt{(a^2 + 2ab + 2ac + b^2 + 2bc + c^2)} = a + b + c.$

13) $\sqrt{\left(9x^2 - 30ax - 3a^2x + 25a^2 + 5a^3 + \frac{a^4}{4}\right)} =$

$3x - 5a - \frac{a^2}{2}.$

14) $\sqrt{(4x^4 + 8ax^3 + 4a^2x^2 + 16b^2x^2 + 16ab^2x + 16b^4)}$

$= 2x^2 + 2ax + 4b^2.$

15) $\sqrt{(9a^2 - 6ab + 30ac + 6ad + b^2 - 10bc - 2bd + 25c^2}$

$+ 10cd + d^2)} = 3a - b + 5c + d.$

16) $\sqrt{(\frac{9}{4} + 6x - 17x^2 - 28x^3 + 49x^4)} = \frac{3}{2} + 2x - 7x^2.$

17) $\sqrt{\left(9x^4 - 3ax^3 + 6bx^3 + \frac{a^2x^2}{4} - abx^2 + b^2x^2\right)}$

$= 3x^2 - \frac{ax}{2} + bx.$

18) $\sqrt{(\frac{4}{9}a^2x^4 - \frac{4}{3}abx^3z + \frac{8}{3}a^2bx^2z^2 + b^2x^2z^2 - 4ab^2xz^3}$

$+ 4a^2b^2z^4)} = \frac{2}{3}ax^2 - bxz + 2abz^2.$

19) $\sqrt{\left(\frac{a^2 - 2ab + b^2}{x^4 + 4ax^2 + 4a^2}\right)} = \frac{a - b}{x^2 + 2a}.$

20) $\sqrt{\left(\frac{a^2x^2 + 2ab^2x^3 + b^4x^4}{a^{2m} + 2a^m x^n + x^{2n}}\right)} = \frac{ax + b^2x^2}{a^m + x^n}.$

21) $\sqrt{\left(a^{2m}x^{2n} + 10ca^{2m-2}x^{2n+1} - 6a^{m+1}x^{n-1} + 25c^2a^{2m-4}\right.}$

$\left. x^{2n+2} - 30ca^{m-1}x^n + \frac{9a^2}{x^2}\right)} = a^m x^n + 5ca^{m-2}$

$x^{n+1} - \frac{3a}{x}.$

22) $\sqrt{\left(\frac{9\,a^{2m-2}\,c^2}{4d^{6p}} - \frac{3a^{m+n-1}b^{2n-1}c}{d^{3p-3}} - \frac{2^8a^{m-1}b^xc}{d^{3p}} + a^{2n}b^{4n-2}d^6 + \frac{2^9}{3}\,a^nb^{x+2n-1}d^3 + \frac{2^{16}b^{2x}}{9}\right)}$
$= \frac{3a^{m-1}c}{2d^{3p}} - a^nb^{2n-1}d^3 - \frac{2^8b^x}{3}.$

c) Кубическіе корни изъ сложныхъ буквенныхъ выраженій.

1) $\sqrt[3]{(a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3)} = a + b.$

2) $\sqrt[3]{(a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3)} = a - b.$

3) $\sqrt[3]{(x^3 + 6x^2 + 12x + 8)} = x + 2.$

4) $\sqrt[3]{(8a^3 - 84a^2x + 294ax^2 - 343x^3)} = 2a - 7x.$

5) $\sqrt[3]{(x^6 - 6cx^5 + 12c^2x^4 - 8c^3x^3)} = x^2 - 2cx.$

6) $\sqrt[3]{(a^{3m} - 6a^{2m+1}x^n + 12a^{m+2}x^{2n} - 8a^3x^{3n})} =$
$a^m - 2ax^n.$

7) $\sqrt[3]{(8 - 12x^{3n-1} + 6x^{6n-2} - x^{9n-3})} = 2 - x^{3n-1}.$

8) $\sqrt[3]{\left(\frac{a^3c^3}{b^3}\,x^6 - \frac{3a^2c}{b}\,x^5 + \frac{3ab}{c}\,x^4 - \frac{b^3}{c^3}\,x^3\right)}$
$= \frac{ac}{b}\,x^2 - \frac{b}{c}\,x.$

9) $\sqrt[3]{\left(b^3 + \frac{2a^2b^2}{2c^2}\,x^{-2} + \frac{3a^4b}{4c^4}\,x^{-4} + \frac{a^6}{8c^6}\,x^{-6}\right)}$
$= b + \frac{a^2}{2c^2}\,x^{-2} = b + \frac{a^2}{2c^2x^2}.$

10) $\sqrt[3]{(a^3 + 3a^2b + 3a^2c + 3ab^2 + 6abc + 3ac^2 + b^3 + 3b^2c + 3bc^2 + c^3)} = a + b + c.$

11) $\sqrt[3]{(27z^6 - 54az^5 + 63a^2z^4 - 44a^3z^3 + 21a^4z^2 - 6a^5z + a^6)} = 3z^2 - 2az + a^2.$

12) $\sqrt[3]{\left(\frac{a^3y^3}{b^6c^3} + \frac{3a^2cy^4}{b^4d} - \frac{3a^3y^2}{b^4c^2} + \frac{3ac^5y^5}{b^2d^2} - \frac{6a^2c^2y^3}{b^2d} + \frac{3a^3y}{b^2c} + \frac{c^9y^6}{d^3} - \frac{3ac^6y^4}{d^2} + \frac{3a^2c^3y^2}{d} - a^3\right)}$
$= \frac{ay}{b^2c} + \frac{c^3y^2}{d} - a.$

13) $\sqrt[3]{(8x^6 + 48cx^5 + 60c^2x^4 - 80c^3x^3 - 90c^4x^2 + 108c^5x - 27c^6)} = 2x^2 + 4cx - 3c^2.$

14) $\sqrt[3]{[(a+b)^{6m}x^3 + 6ca^p(a+b)^{4m}x^2 + 12c^2a^{2p}(a+b)^{2m}x + 8c^3a^{3p}]} = (a+b)^{2m}x + 2ca^p.$

d) Квадратные и кубическіе корни изъ неполныхъ квадратовъ и кубовъ.

1) $\sqrt{(a^2 - x^2)} = a - \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} - \frac{x^6}{16a^5} - \frac{5x^8}{128a^7} - \ldots\ldots$

2) $\sqrt{(a^2 + x^2)} = a + \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} + \frac{x^6}{16a^5} - \frac{5x^8}{128a^7} + \ldots\ldots$

3) $\sqrt{(1 - x)} = 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128} - \ldots\ldots$

4) $\sqrt{(1 + x)} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128} + \ldots\ldots$

5) $\sqrt[3]{(a^3 - x^3)} = a - \frac{x^3}{3a^2} - \frac{x^6}{9a^5} - \frac{5x^9}{81a^8} - \frac{10x^{12}}{243a^{11}} - \ldots\ldots$

6) $\sqrt[3]{(a^3 + x^3)} = a + \frac{x^3}{3a^2} - \frac{x^6}{9a^5} + \frac{5x^9}{81a^8} - \frac{10x^{12}}{243a^{11}} + \ldots\ldots$

7) $\sqrt[3]{(1 - x)} = 1 - \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} - \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243} - \ldots\ldots$

8) $\sqrt[3]{(1 + x)} = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243} + \ldots\ldots$

Не худо показать ученикамъ пользу сихъ рядовъ при извлеченіи квадратныхъ и кубическихъ корней на нѣкоторыхъ примѣрахъ, принимая для a числа 2, 3, 4, 5 и т. д., а для x *единицу* въ 1-й, 2-й, 5-й, 6-й формулахъ; въ формулахъ же 3-й, 4-й, 7-й и 8-й полагая x равнымъ $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ и т. д.

---

3. Дѣйствія надъ коренными величинами.

a) Сложеніе и вычитаніе.

1) $b\sqrt[m]{(a)} + c\sqrt[m]{(a)} - d\sqrt[m]{(a)} = (b + c - d)\sqrt[m]{(a)}.$

2) $3\sqrt[6]{(5)} + 17\sqrt[6]{(5)} - 12\sqrt[6]{(5)} - 7\sqrt[6]{(5)} = \sqrt[6]{(5)}.$

3) $6\sqrt{(2)} - 5\sqrt{(2)} + \frac{3}{4}\sqrt{(2)} - \frac{1}{2}\sqrt{(2)} = \frac{5}{4}\sqrt{(2)}.$

4) $6\sqrt[4]{(\frac{3}{2})} - 2\sqrt[4]{(\frac{3}{2})} + a\sqrt[4]{(\frac{3}{2})} - \frac{2b}{c}\sqrt[4]{(\frac{3}{2})}$
$= \left(4 + a - \frac{2b}{c}\right)\sqrt[4]{(\frac{3}{2})}.$

5) $\sqrt[7]{(9)} - 2\sqrt[5]{(14)} + \sqrt[3]{(2)} - 5\sqrt[5]{(14)} - 2\sqrt[7]{(9)}$
$= 3\sqrt[7]{(9)} - 7\sqrt[5]{(14)} + \sqrt[3]{(2)}.$

Примѣры сложенія.

6)
$$\begin{array}{r}
10\sqrt{(2)} + 5\sqrt[7]{(8)} - 7\sqrt[m]{(5)} + 2\sqrt[3]{(a)} \\
5\sqrt{(2)} + \sqrt[7]{(8)} + 4\sqrt[m]{(5)} - 3\sqrt[3]{(a)} \\
-3\sqrt{(2)} - 9\sqrt[7]{(8)} - 3\sqrt[m]{(5)} + \sqrt[3]{(a)} + \sqrt{(ab)} \\
\hline
12\sqrt{(2)} - 3\sqrt[7]{(8)} - 6\sqrt[m]{(5)} + \sqrt{(ab)}.
\end{array}$$

7)
$$\begin{array}{r}
13\sqrt[5]{(12a^2bc)} + 17\sqrt[m]{(3)} - 5\sqrt[n]{(6)} \\
7\sqrt[5]{(12a^2bc)} + 2\sqrt[m]{(6)} + 3\sqrt[m]{(3)} - 2a\sqrt{(c)} + \frac{1}{2}\sqrt[7]{(9a)} \\
-20\sqrt[5]{(12a^2bc} + 9\sqrt[5]{(12a^2bc)} + \sqrt{(c)} - 3\sqrt[7]{(9a)} \\
\hline
20\sqrt[m]{(3)} - 3\sqrt[n]{(6)} + 9\sqrt[5]{(12a^2bc)} - (2a-1)\sqrt{(c)} - \frac{5}{2}\sqrt[7]{(9a)}.
\end{array}$$

Примѣры вычитанія.

$$8)\ 18\sqrt{(7)} - 5\sqrt{(6)} + 10\sqrt[4]{(11)} - 3\sqrt[3]{(13)}$$
$$6\sqrt{(7)} - 2\sqrt{(6)} + \tfrac{17}{2}\sqrt[4]{(11)} + 2\sqrt[3]{(13)}$$
$$12\sqrt{(7)} - 3\sqrt{(6)} + \tfrac{3}{2}\sqrt[4]{(11)} - 5\sqrt[3]{(13)}.$$

$$9)\ 16\sqrt[4]{(6ab)} - \sqrt[5]{(9c^3)} + 3\sqrt[m]{(7a)} - \sqrt{(10)}$$
$$-\ 8\sqrt[5]{(9c^3)} + 5\sqrt[m]{(7a)} + 3\sqrt[4]{(6ab)} + 2\sqrt[4]{(10)}$$
$$13\sqrt[4]{(6ab)} + 7\sqrt[5]{(9c^3)} + 8\sqrt[m]{(7a)} - \sqrt{(10)} - 2\sqrt[4]{(10)}.$$

b) Сокращенія и переобразованія.

1) $\sqrt{(24)} + \sqrt{(54)} - \sqrt{(6)} = 4\sqrt{(6)}$.

2) $2\sqrt{(8)} - 7\sqrt{(18)} + 5\sqrt{(72)} - \sqrt{(50)} = 8\sqrt{(2)}$.

3) $\sqrt{(12)} + 2\sqrt{(27)} + 3\sqrt{(75)} - 9\sqrt{(48)} = -13\sqrt{(3)}$.

4) $8\sqrt{(\frac{3}{4})} - \frac{1}{2}\sqrt{(12)} + 4\sqrt{(27)} - 2\sqrt{(\frac{3}{16})} = \frac{29}{2}\sqrt{(3)} = \frac{29\sqrt{(3)}}{2}$.

5) $2\sqrt{(\frac{5}{3})} + \sqrt{(60)} - \sqrt{(15)} + \sqrt{(\frac{3}{5})} = \frac{28}{15}\sqrt{(15)}$.

6) $7\sqrt[3]{(54)} + 3\sqrt[3]{(16)} + \sqrt[3]{(2)} - 5\sqrt[3]{(128)} = 8\sqrt[3]{(2)}$.

7) $\sqrt[3]{(81)} - 2\sqrt[3]{(24)} + \sqrt{(28)} + 2\sqrt{(63)} = 8\sqrt{(7)} - \sqrt[3]{(3)}$.

8) $\sqrt[4]{(32)} + 2\sqrt[3]{(40)} = 2\sqrt[4]{(2)} + 4\sqrt[3]{(5)}$.

9) $3\sqrt{(5)} - 2\sqrt{(2)} + 3\sqrt{(6)} = \sqrt{(45)} - \sqrt{(8)} + \sqrt{(54)}$.

10) $5\sqrt[3]{(7)} + 3\sqrt{(2)} + 2\sqrt[4]{(3)} = \sqrt[3]{(875} + \sqrt{(18)} + \sqrt[4]{(48)}$.

11) $4\sqrt[5]{\left(\frac{1}{2}\right)} + 3\sqrt[3]{(2)} - 5\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)} = \sqrt[5]{(512)} + \sqrt[3]{(54)} - \sqrt{\left(\frac{25}{3}\right)}$.

12) $\sqrt{(45c^3)} - \sqrt{(80c^3)} + \sqrt{(5a^2c)} = (a - c)\sqrt{(5c)}$.

13) $\sqrt{(18a^5b^3)} + \sqrt{(50a^3b^3)} = (3a^2b + 5ab)\sqrt{(2ab)}$.

14) $\sqrt[3]{(16a^3b} + \sqrt{(4a^2b)} - \sqrt{(a^2b)} - \sqrt[3]{(54a^3b)} = a\sqrt{(b)} - a\sqrt[3]{(2b)}$.

15) $\sqrt[4]{(2^{14}a^{13}b^5c)} - \sqrt[4]{(4.5^4a^5b^9c^5)} + \sqrt[4]{(4.6^4ab^5c)} = (8a^3b - 5ab^2c + 6b)\sqrt[4]{(4abc)}$.

16) $\sqrt{\left(\frac{a^4c}{b^3}\right)} + \sqrt{\left(\frac{a^2c^3}{bd^2}\right)} - \sqrt{\left(\frac{a^2cd^2}{be^2}\right)} = \left(\frac{a^2}{b} + \frac{ac}{d} - \frac{ad}{e}\right)\sqrt{\left(\frac{c}{b}\right)}$.

17) $\sqrt[3]{\left(\frac{27a^5x}{2b}\right)} - \sqrt[3]{\left(\frac{a^2x}{2b}\right)} = (3a - 1)\sqrt[3]{\left(\frac{a^2x}{2b}\right)}$.

18) $3b^2\sqrt{(a^3c)} + \frac{2}{c}\sqrt{(a^5c^3)} - c^4\sqrt{\left(\frac{ac}{b^2}\right)} = \left(3ab^2 + 2a^2 - \frac{c^4}{b}\right)\sqrt{(ac)}$.

19) $5a\sqrt[3]{\left(\frac{a^2}{b}\right)} + b\sqrt[3]{\left(\frac{b^2c^3}{a}\right)} = \left(\frac{5a}{b} + \frac{bc}{a}\right)\sqrt[3]{(a^2b^2)}$.

20) $\sqrt[3]{(54a^{m+6}b^3)} - \sqrt[3]{(16a^{m-3}b^6} + \sqrt[3]{(2a^{4m+9})} + \sqrt[3]{(2c^3a^m)} = \left(3a^2b - \frac{2b^2}{a} + a^{m+3} + c\right)\sqrt[3]{(2a^m)}$.

21) $\sqrt[m]{(2^ma^{mp+3}b^{mn+5})} + \sqrt[m]{(3^ma^{2m-mn+3}b^{m+5})} - \sqrt[m]{a^3b^5c^{2m}} = (2a^pb^n + 3a^{2-n}b - c^2)\sqrt[m]{(a^3b^5)}$.

22) $\sqrt[6]{\left(\frac{3\cdot 2^3c^3f^4}{d^4g}\right)} + \sqrt[6]{\left(\frac{2^3g^{11}}{3^5c^3d^4f^2}\right)} = \left(\frac{f}{d} + \frac{g^2}{3cd}\right)\sqrt[6]{\left(\frac{3.2^3c^3d^2}{f^2g}\right)}$.

23) $\sqrt[2n]{\left(\frac{a^{6n+4}b^{2n-3}c^{2mn}}{d^{9n+3}f^2g^{p+2n-1}}\right)} = \frac{a^3bc^m}{d^4g}\sqrt[2n]{\left(\frac{a^4}{d^{n+3}f^2g^{p-1}b^3}\right)}.$

24) $\sqrt{(a^2c + a^2d)} = a\sqrt{(c + d)}.$

25) $\sqrt[3]{(a^{6m}b - a^{7m}f^2)} = a^{2m}\sqrt[3]{(b - a^mf^2)}.$

26) $\sqrt[7]{\left(\frac{a^{40}}{b^6c^6} + \frac{a^3}{b^5c^5}\right)} = \frac{a}{bc}\sqrt[7]{(a^3bc + ab^2c^2)}.$

27) $\sqrt{\left(\frac{a^3b^2}{cd^2} - \frac{2a^2b^3}{c^2d}\right)} = \frac{ab}{cd}\sqrt{(ac - 2bd)}.$

28) $x\sqrt[3]{\left(\frac{8a^4}{27b^3} + \frac{16a^3}{27b^2}\right)} = \frac{2ax}{3b}\sqrt[3]{(a + 2b)}.$

29 $\sqrt{(3a^2c + 6abc + 3b^2c)} = (a + b)\sqrt{(3c)}.$

30) $\sqrt{(4a^5b^2 - 20a^3b^3 + 25ab^4)} = (2a^2 - 5b)\sqrt{(ab^2)}.$

31) $\sqrt{(2ax^2 - 4ax + 2a)} = (x - 1)\sqrt{(2a)}.$

32) $\sqrt{\left(\frac{a^3b - 4a^2b^2 + 4ab^3}{c^2d^2}\right)} = \frac{a - 2b}{cd}\sqrt{(ab)}.$

33) $\sqrt{\left(\frac{a^2x - 2ax^2 + x^3}{a^2 + 2ax + x^2}\right)} = \frac{a - x}{a + x}\sqrt{(x)}.$

34) $\sqrt{\left(\frac{ac}{a^2bd - 2ab^2d + b^3d}\right)} = \frac{1}{a - b}\sqrt{\left(\frac{ac}{bd}\right)}.$

35) $\sqrt{\left(\frac{x^3 + 2x^2 + x}{a^3 + a^2b}\right)} = \frac{x + 1}{a}\sqrt{\left(\frac{x}{a + b}\right)}.$

36) $\sqrt{\left(\frac{a^3 - a^2x - ax^2 + x^3}{b^5c^3d}\right)} = \frac{a - x}{b^2c}\sqrt{\left(\frac{a + x}{bcd}\right)}.$

37) $\frac{a - b}{a + b}\sqrt{\left(\frac{ac}{a^2 - 2ab + b^2}\right)} = \frac{\sqrt{(ac)}}{a + b}.$

38) $\frac{a + b}{a - b}\sqrt{\left(\frac{a - b}{a + b}\right)}\sqrt{} = \left(\frac{a + b}{a - b}\right).$

39) $(x + 1)\sqrt{\left(\frac{f^2g}{x^2 - 1}\right)} = \sqrt{\left(\frac{(x + 1)^2f^2g}{(x + 1)(x - 1)}\right)}$

$= \sqrt{\left(\frac{(x + 1)f^2g}{x - 1}\right)}.$

40) $\sqrt[m]{}\sqrt[n]{}\sqrt[p]{}\sqrt[q]{(a)} = \sqrt[mnpq]{(a)}.$

41) $\sqrt[3]{[2\sqrt{(5)}]} = \sqrt[6]{(20)}.$

42) $\sqrt[m]{[a\sqrt[n]{(b)}]} = \sqrt[mn]{(a^nb)}.$

публ. имени В. И. Ленина С. С. С. Р. библ.

c) Умноженіе.

1) $\sqrt[m]{(a)} \times \sqrt[m]{(b)} \times \sqrt[m]{(c)} = \sqrt[m]{(abc)}$.

2) $a\sqrt[n]{(x)} \times b\sqrt[n]{(y)} \times c\sqrt[n]{(z)} = abc\sqrt[n]{(xyz)}$.

3) $\sqrt[3]{(4)} \times 7\sqrt[3]{(6)} \times \frac{1}{2}\sqrt[3]{(5)} = \frac{7}{2}\sqrt[3]{(120)}$.

4) $4 \times 2\sqrt[6]{(3)} \times \sqrt[6]{(72)} = 8\sqrt{(6)}$.

5) $5\sqrt{(3)} \times 7\sqrt{(\frac{8}{3})} \times \sqrt{(2)} = 140$.

6) $c\sqrt{(a)} \times d\sqrt{(a)} = acd$.

7) $\sqrt[m]{(a)} \times \sqrt[n]{(b)} = \sqrt[mn]{(a^n)} \times \sqrt[mn]{(b^m)} = \sqrt[mn]{(a^n b^m)}$

8) $\sqrt{(2)} \times \sqrt[3]{(3)} \times \sqrt[4]{(5)} = \sqrt[12]{(648000)}$.

9) $\sqrt[3]{(2)} \times \sqrt[6]{(\frac{1}{3})} \times \sqrt[8]{(3)} = \sqrt[24]{(\frac{256}{3})}$.

10) $\sqrt[5]{(4)} \times \sqrt[10]{(3)} \times \sqrt[15]{(6)} = \sqrt[30]{(3981312)}$.

11) $\sqrt[7]{(\frac{4}{3})} \times \sqrt[3]{(\frac{1}{2})} \times \sqrt[14]{(6)} = \sqrt[42]{(\frac{2}{27})}$.

12) $a\sqrt[m]{(x)} \times b\sqrt[n]{(y)} \times c\sqrt[p]{(z)} = abc\sqrt[mnp]{(x^{np}y^{mp}z^{mn})}$.

13) $\sqrt[12]{\left(\frac{a}{bc}\right)} \times \sqrt[8]{\left(\frac{a^m}{b}\right)} = \sqrt[24]{\left(\frac{a^{3m+2}}{b^5c^2}\right)}$.

14) $\frac{ac}{b^3d^3}\sqrt[3]{\left(\frac{bcd}{e}\right)} \times \sqrt[6]{\left(\frac{b^{10}d^7e}{a^2c^3}\right)} = \frac{1}{bd}\sqrt[6]{\left(\frac{a^4c^3}{d^3e}\right)}$.

15) $[\sqrt{(5)} + 2\sqrt{(7)} + 3\sqrt{(10)}] \times 2\sqrt{(5)} = 10 + 4\sqrt{(35)} + 6\sqrt{(50)}$.

16) $[\sqrt{(6)} + \sqrt[3]{(2)} - 2\sqrt[4]{(5)}] \times \sqrt{(3)} = \sqrt{(18)} + \sqrt[6]{(108)} - 2\sqrt[4]{(45)}$.

17) $[3 + \sqrt{(5)}] \times [2 - \sqrt{(5)}] = 1 - \sqrt{(5)}$.

18) $[7 + 2\sqrt{(6)}] \times [9 - 5\sqrt{(6)}] = 3 - 17\sqrt{(6)}$.

19) $[9 - 7\sqrt{(13)}] \times [5 - 6\sqrt{(13)}] = 591 - 89\sqrt{(13)}$.

20) $[6 + 12\sqrt{(7)}] \times [3 - 5\sqrt{(7)}] = 6\sqrt{(7)} - 402$.

21) $[9\sqrt{(12)} + 3] \times [5\sqrt{(12)} + 8] = 564 + 87\sqrt{(12)}$.

22) $[13 - \sqrt{(5)}] \times [7 + 3\sqrt{(5)}] = 76 + 32\sqrt{(5)}$.

23) $[\frac{3}{2} + \frac{5}{2}\sqrt{(\frac{1}{2})}] \times (\frac{1}{2} - 7\sqrt{(\frac{1}{2})}] = -8 - \frac{37}{4}\sqrt{(\frac{1}{2})}$.

24) $[-5 - \sqrt{(\frac{3}{4})}] \times [-5 + \sqrt{(\frac{3}{4})}] = 24\frac{1}{4}$.

25) $[9 + 2\sqrt{(10)}] \times [9 - 2\sqrt{(10)}] = 41$.

26) $[\sqrt{(2)} + \sqrt{(3)}] \times [2\sqrt{(2)} - \sqrt{(3)}] = 1 + \sqrt{(6)}$.

27) $[5\sqrt{(14)} + 3\sqrt{(5)}] \times [7\sqrt{(14)} - 2\sqrt{(5)}] = 460 + 11\sqrt{(70)}$.

28) $[2\sqrt{(7)} - 5\sqrt{(6)}] \times \left(\frac{3\sqrt{(7)}}{2} - 2\sqrt{(6)}\right) = 81 - \frac{23}{2}\sqrt{(42)}$.

29) $[4\sqrt{(\frac{7}{3})} + 5\sqrt{(\frac{1}{2})}] \times [\sqrt{(\frac{7}{3})} + 2\sqrt{(\frac{1}{2})}] = \frac{43}{3} + 13\sqrt{(\frac{7}{6})}$.

30) $[\sqrt{(2)} + \sqrt{(3)}]^3 = 11\sqrt{(2)} + 9\sqrt{(3)}$.

31) $[\sqrt{(7)} - \sqrt{(3)}] \times [\sqrt{(5)} - \sqrt{(2)}] = \sqrt{(35)} - \sqrt{(15)} - \sqrt{(14)} + \sqrt{(6)}$.

32) $[5 - 8\sqrt{(7)}] \times [9 + 10\sqrt{(3)}] = 45 - 72\sqrt{(7)} + 50\sqrt{(3)} - 80\sqrt{(21)}$.

33) $7\sqrt{(6)} + 2\sqrt{(3)}] \times [\sqrt{(5)} + \sqrt{(6)}] = 7\sqrt{(30)} + 2\sqrt{(15)} + 42 + 2\sqrt{(18)}$.

34) $[3\sqrt{(\frac{1}{2})} - \sqrt{(\frac{1}{3})}] \times [5\sqrt{(\frac{5}{6})} + \sqrt{(\frac{2}{7})}] = 15\sqrt{(\frac{5}{12})} - 5\sqrt{(\frac{5}{18})} + 3\sqrt{(\frac{1}{7})} - \sqrt{(\frac{2}{21})}$.

35) $[5\sqrt{(3)} - 7\sqrt{(6)}] \times [2\sqrt{(8)} - 3] = 41\sqrt{(6)} - 71\sqrt{(3)}$.

36) $[2\sqrt{(6)} - 3\sqrt{(5)}] \times [4\sqrt{(3)} - \sqrt{(10)}] = 39\sqrt{(2)} - 16\sqrt{(15)}$.

37) $[\sqrt{(12)} - 2\sqrt{(7)}] \times [2 + \sqrt{(21)}] = 2\sqrt{(7)} - 10\sqrt{(3)}$.

38) $[3\sqrt{(5)} + 2\sqrt{(6)} - 2] \times [2\sqrt{(5)} + 18\sqrt{(6)}] = 246 + 58\sqrt{(30)} - 4\sqrt{(5)} - 36\sqrt{(6)}$.

39) $[2\sqrt{(8)} + 3\sqrt{(5)} - 7\sqrt{(2)}] \times [\sqrt{(72)} - 5\sqrt{(20)} - 2\sqrt{(2)}] = -174 + 42\sqrt{(10)}$.

40) $[2\sqrt{(5)} + 3\sqrt{(2)} - 8\sqrt{(6)}] \times [2 + 5\sqrt{(2)} - 3\sqrt{(12)}] = 30 + 4\sqrt{(5)} + 150\sqrt{(2)} - 34\sqrt{(6)} + 10\sqrt{(10)} - 40\sqrt{(12)} - 6\sqrt{(60)}$.

41) $[3\sqrt{(2)} + 2\sqrt{(5)} + \sqrt{(7)}] \times [\sqrt{(6)} + 5\sqrt{(3)} + \sqrt{(10)}] = 3\sqrt{(12)} + 2\sqrt{(30)} + \sqrt{(42)} + 15\sqrt{(6)} + 10\sqrt{(15)} + 5\sqrt{(21)} + 3\sqrt{(20)} + 2\sqrt{(50)} + \sqrt{(70)}$.

42) $[\sqrt[3]{(5)} - 2\sqrt[3]{(6)}] \times [3\sqrt[3]{(4)} - \sqrt[3]{(36)}] = 12 + 3\sqrt[3]{(20)} - 6\sqrt[3]{(24)} - \sqrt[3]{(180)}$.

43) $[5\sqrt[3]{(4)} - 2\sqrt[3]{(16)}] \times [2\sqrt[3]{(2)} - 3\sqrt[3]{(4)}] = 44 - 4\sqrt[3]{(32)} - 15\sqrt[3]{(16)}$.

44) $[2\sqrt{(3)} + \sqrt[3]{(2)}] \times [2 + \sqrt[3]{(9)}] = 4\sqrt{(3)} + 2\sqrt[3]{(2)} + \sqrt[3]{(18)} + 6\sqrt[6]{(3)}$.

45) $[5 + \sqrt[3]{(4)} + 2\sqrt[4]{(5)}] \times [\sqrt{(6)} + \sqrt{(5)}] = 5\sqrt{(6)} + 5\sqrt{(5)} + 2\sqrt[4]{(125)} + 2\sqrt[4]{(180)} + 2\sqrt[6]{(54)} + \sqrt[6]{(2000)}$.

46) $[a + \sqrt{(b)}] \times [a - \sqrt{(b)}] = a^2 - b$.

47) $[\sqrt{(a)} + \sqrt{(b)}] \times [\sqrt{(a)} - \sqrt{(b)}] = a - b$.

48) $[c\sqrt{(a)} + d\sqrt{(b)}] \times [c\sqrt{(a)} - d\sqrt{(b)}] = ac^2 - bd^2$.

49) $[a + \sqrt{(x)}] \times [b + \sqrt{(y)}] = ab + a\sqrt{(y)} + b\sqrt{(x)} + \sqrt{(xy)}$.

50) $\left[\sqrt{\left(\frac{ad^2}{c^3}\right)} + \sqrt{\left(\frac{a^3}{b}\right)}\right] \times [\sqrt{ac} + \sqrt{(b^3)} = \frac{ad}{c} + ab + \left(a + \frac{b^2d}{c^2}\right)\sqrt{\left(\frac{ac}{b}\right)}$.

51) $\left[\sqrt{\left(\frac{ac^2}{a+b}\right)}+\sqrt{\left(\frac{1}{b}\right)} \times \left[\frac{c}{d}\sqrt{(a+b)\,a}-\sqrt{\left(\frac{b^6}{c^2}\right)}\right]\right.$
$= \frac{ac^2}{d}-\frac{b^2}{c}+\left(\frac{c}{bd}-\frac{b^2}{a+b}\right)\sqrt{(a+b)\,ab}.$

52) $[\sqrt{(a)}+c\sqrt[3]{(b)}] \times [\sqrt{(a)}-\sqrt[3]{(b)}] = a-c^2\sqrt[3]{(b^2)}.$

53) $[2\sqrt{(a)}+3c\sqrt[3]{(b)}] \times [\sqrt{(a)}+4\sqrt[3]{(b)}] = 2a$
$+ 12c\sqrt[3]{(b^2)}+(3c+8)\sqrt[6]{(a^3b^2)}.$

54) $[c\sqrt[4]{(a)}+d\sqrt[4]{(b)}] \times [f\sqrt[4]{(a)}+g\sqrt[4]{(b)}] = cf\sqrt{(a)}$
$+ dg\sqrt{(b)}+(df+cg\sqrt[4]{(ab)}.$

55) $[\sqrt[4]{(a)}+\sqrt[4]{(b)}+\sqrt[4]{(c)}]^2 = \sqrt{(a)}+\sqrt{(b)}+\sqrt{(c)}$
$+ 2\sqrt[4]{(ab)}+2\sqrt[4]{(ac)}+2\sqrt[4]{(bc)}.$

56) $\sqrt{[a+\sqrt{(b)}]} \times \sqrt{(c+\sqrt{(d)}]} = \sqrt{[ac+c\sqrt{(b)}}$
$+ a\sqrt{(d)}+\sqrt{(bd)}].$

57) $\sqrt[n]{[a+\sqrt{(b)}]} \times \sqrt[n]{[a-\sqrt{(b)}]} = \sqrt[n]{(a^2-b)}.$

58) $\sqrt[m]{[a+\sqrt[n]{(b)}]} \times \sqrt[m]{[c+\sqrt[p]{(d)}]} = \sqrt[m]{[ac+c\sqrt[n]{(b)}}$
$+ a\sqrt[p]{(d)}+\sqrt[np]{b^p d^n)}].$

59) $\sqrt[4]{[5+2\sqrt{(6)}]} \times \sqrt{[3+\sqrt{(6)}]} = \sqrt[4]{[147}$
$+ 60\sqrt{(6)}].$

60) $3\sqrt[n]{[2+4\sqrt[3]{(3)}]} \times 4\sqrt[n]{[6+2\sqrt[3]{(9)}]} = 12\sqrt[n]{[36}$
$+ 4\sqrt[3]{(9)}+24\sqrt[3]{(3)}].$

61) $5\sqrt{(2)} \times 3\sqrt{[4+6\sqrt{(2)}]} = 30\sqrt{[2+3\sqrt{(2)}]}.$

---

d) Дѣленіе.

1) $\sqrt[m]{(a)} : \sqrt[m]{(b)} = \sqrt[m]{\left(\frac{a}{b}\right)}$.

2) $c\sqrt[m]{(a)} : d\sqrt[m]{(b)} = \frac{c}{d}\sqrt[m]{\left(\frac{a}{b}\right)}$.

3) $a : \sqrt[m]{(b)} = \sqrt[m]{\left(\frac{a^m}{b}\right)}$

4) $a : \sqrt{(a)} = \sqrt{(a)}$.

5) $2ab^2c^3 : 4\sqrt[3]{(a^3bc^5d)} = \frac{1}{2}\sqrt[3]{\left(\frac{b^5c^4}{d}\right)}$.

6) $\sqrt[5]{(ab^{n-1}c^2)} : \sqrt[5]{\left(\frac{a^3b^2}{dc^{n-4}}\right)} = \sqrt[5]{\left(\frac{b^{n-3}c^{n+1}d}{a^2}\right)}$.

7) $\sqrt[n]{\left(\frac{f^3g^2}{dx^5}\right)} : \sqrt[n]{\left(\frac{fg}{dx}\right)} = \sqrt[n]{\left(\frac{f^2g}{x^4}\right)}$.

8) $\sqrt[3]{(a^2bc)} : \sqrt[5]{(ab^2c^3)} = \sqrt[15]{\left(\frac{a^7}{bc^4}\right)}$.

9) $\sqrt[4]{\left(\frac{a}{b}\right)} : \sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)} = \sqrt[4]{\left(\frac{b}{a}\right)}$.

10 $4\sqrt[3]{(12)} : 2\sqrt{(3)} = 2\sqrt[6]{\left(\frac{16}{3}\right)}$.

11) $\sqrt[5]{(64)} : 2 = \sqrt[5]{(2)}$.

12) $\sqrt[2n]{\left(\frac{a^mb}{c^2d}\right)} : \sqrt[3n]{\left(\frac{a^{m-1}c^3}{d^5}\right)} = \sqrt[6n]{\left(\frac{a_{m+2}b^3d^7}{c^{12}}\right)}$.

13) $c\sqrt{(a^2 - x^2)} : \sqrt{(a + x)} = c\sqrt{(a - x)}$.

14) $\sqrt{(ab^2 - b^2c)} : \sqrt{(a - c)} = b$.

15) $\sqrt{(a^2 - z^2)} : (a - z) = \sqrt{\left(\frac{a+z}{a-z}\right)}$.

16) $[\sqrt{(72)} + \sqrt{(32)} - 4] : \sqrt{(8)} = 5 - \sqrt{(2)}$.

17) $[\sqrt{(6)} + 4\sqrt{(18)} - 3 - 8\sqrt{(2)}] : \sqrt{(3)} = \sqrt{(2)} + 4\sqrt{(6)} - \sqrt{(3)} - 8\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)}$.

18) $[3\sqrt{(15)} - \sqrt{(20)} + \sqrt{(10)} - 7] : 2\sqrt{(5)} = \frac{3}{2}\sqrt{(3)} - 1 + \frac{1}{2}\sqrt{(2)} - \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{49}{5}\right)}$.

19) $[2\sqrt{(32)} + 3\sqrt{(2)} + 4] : 4\sqrt{(8)} = \frac{11}{8} + \frac{1}{4}\sqrt{(2)}$.

20) $[6 + 2\sqrt{(3)} - \sqrt[3]{(18)}] : \sqrt{(6)} = \sqrt{(6)} + \sqrt{(2)} - \sqrt[6]{(\frac{3}{2})}$.

21) $[\sqrt{(8)} + \sqrt[3]{(12)} + \sqrt[4]{(2)}] : 2\sqrt{(2)} = 1 + \frac{\sqrt[6]{(18)}}{2} + \frac{\sqrt[4]{(8)}}{4}$.

22) $1 : [\sqrt{(3)} + 2] = 2 - \sqrt{(3)}$.

23) $3 : [1 + \sqrt{(2)}] = 3\sqrt{(2)} - 3$.

24) $12 : [5 - \sqrt{(21)}] = 15 + 3\sqrt{(21)}$.

25) $7 : [\sqrt{(8)} - 2] = \frac{7}{2}[\sqrt{(2)} + 1]$.

26) $\sqrt{(3)} : [2\sqrt{(5)} - 3\sqrt{(2)}] = \sqrt{(15)} + \frac{3}{2}\sqrt{(6)}$.

27) $\frac{3}{4}\sqrt{(\frac{5}{6})} : [\sqrt{(\frac{1}{2})} - 2] = -\frac{\sqrt{(15)} + 2\sqrt{(30)}}{28}$.

28) $\frac{1}{2}\sqrt{(\frac{1}{2})} : [\sqrt{(2)} + 3\sqrt{(\frac{1}{2})}] = \frac{1}{10}$.

29) $[1 + \sqrt{(2)}] : [2 - \sqrt{(2)}] = 2 + \frac{3}{2}\sqrt{(2)}$.

30) $[5 - 7\sqrt{(3)}] : [1 + \sqrt{(3)}] = 6\sqrt{(3)} - 13$.

31) $[6 - 3\sqrt{(5)}] : [\sqrt{(5)} - 1] = \frac{3}{4}\sqrt{(5)} - \frac{9}{4}$.

32) $[\sqrt{(3)} + \sqrt{(2)}] : [\sqrt{(3)} - \sqrt{(2)}] = 5 + 2\sqrt{(6)}$.

33) $[3\sqrt{(5)} - 2\sqrt{(2)}] : [2\sqrt{(5)} - \sqrt{(18)}] = 9 + \frac{5}{2}\sqrt{(10)}$.

34) $[6\sqrt{(7)} - 3\sqrt{(3)}] : [\sqrt{(5)} - 2] = 6\sqrt{(35)} + 12\sqrt{(7)} - 3\sqrt{(15)} - 6\sqrt{(3)}$.

35) $1 : [\sqrt{(2)} + \sqrt{(3)} - \sqrt{(5)}] = \frac{\sqrt{(30)}}{12} + \frac{\sqrt{(2)}}{4} + \frac{\sqrt{(3)}}{6}$.

36) $7 : [\sqrt{(10)} - \sqrt{(2)} - \sqrt{(3)}] = 35\sqrt{(10)} + 77\sqrt{(2)} + 63\sqrt{(3)} + 14\sqrt{(60)}$.

37) $\sqrt{(2)} : [1 + 2\sqrt{(2)} - \sqrt{(5)}] = \frac{3}{4}\sqrt{(2)} + \frac{1}{2}\sqrt{(5)} - \frac{1}{4}\sqrt{(10)} - \frac{1}{2}$.

38) $[2 - \sqrt{(3)}] : [1 + \sqrt{(2)} + \sqrt{(3)}] = 1 + \frac{5}{4}\sqrt{(2)} - \frac{1}{2}\sqrt{(3)} - \frac{3}{4}\sqrt{(6)}$.

39) $[3 + 4\sqrt{(3)}] : [\sqrt{(6)} + \sqrt{(2)} - \sqrt{(5)}] = \sqrt{(6)} + \sqrt{(2)} + \sqrt{(5)}$.

40) $[156 + 12\sqrt{(11)}] : [6 + 14\sqrt{(2)} - 2\sqrt{(11)}] = 7\sqrt{(2)} + \sqrt{(11)} - 3$.

41) $[2\sqrt{(6)} + 3\sqrt{(10)}] : [3\sqrt{(2)} - \sqrt{(3)} + \sqrt{(5)}] = \frac{7}{10}\sqrt{(30)} + \frac{27}{10}\sqrt{(5)} - \frac{3}{2}\sqrt{(3)} - 3\sqrt{(2)}$.

42) $\sqrt{(a)} : [b + \sqrt{(c)}] = \frac{b\sqrt{(a)} - \sqrt{(ac)}}{b^2 - c}$.

43) $\sqrt{(a)} : [\sqrt{(b)} + \sqrt{(c)}] = \frac{\sqrt{(ab)} - \sqrt{(ac)}}{b - c}$.

44) $[c\sqrt{(a)} + d\sqrt{(b)}] : [f\sqrt{(h)} + g\sqrt{(l)}] = \frac{cf\sqrt{(ah)} + df\sqrt{(bh)} - cg\sqrt{(al)} - dg\sqrt{(bl)}}{hf^2 - lg^2}$.

45) $[(f^2 - hg^2 - m)\sqrt{(m)} - 2gm\sqrt{(h)}] : [f + g\sqrt{(h)} + \sqrt{(m)}] = f\sqrt{(m)} - g\sqrt{(hm)} - m$.

46) $1 : \sqrt[n]{[a + \sqrt{(b)}]} = \sqrt[n]{\left(\frac{a - \sqrt{(b)}}{a^2 - b}\right)}$.

47) $\sqrt[n]{[\sqrt{(a)} + \sqrt{(b)}]} : \sqrt[n]{[\sqrt{(a)} - \sqrt{(b)}]} = \sqrt[n]{\left(\frac{a + b + 2\sqrt{(ab)}}{a - b}\right)}$.

48) $1 : [\sqrt[4]{(a)} + \sqrt[4]{(b)}] = \frac{\sqrt[4]{(a^3)} - \sqrt[4]{(a^2b)} + \sqrt[4]{(ab^2)} - \sqrt[4]{(b^3)}}{a - b}$ (*).

(*) Дѣлитель и дѣлимое умножены на $\sqrt[4]{(a)} - \sqrt[4]{(b)}$, и дѣйствіе послѣ сего произведено обыкновеннымъ образомъ.

49) $[\sqrt[4]{(a)} + \sqrt[4]{(b)}] : [\sqrt[4]{(a)} - \sqrt[4]{(b)}] =$

$$\frac{a + b + 2\sqrt{(ab)} + 2\sqrt[4]{(a^3b)} + 2\sqrt[4]{(ab^3)}}{a - b}.$$

50) $\sqrt{[ab + \sqrt{(af)}]} : \sqrt{(a)} = \sqrt{\left[b + \sqrt{\left(\frac{f}{a}\right)}\right]}.$

e) Квадратный корень изъ бинома вида: $A \pm \sqrt{(B)}$.

Формула.

$$\sqrt{[A \pm \sqrt{(B)}]} = \sqrt{\left(\frac{A + \sqrt{(A^2 - B)}}{2}\right)} \pm \sqrt{\left(\frac{A - \sqrt{(A^2 - B)}}{2}\right)}.$$

Примѣры.

1) $\sqrt{[7 + 4\sqrt{(3)}]} = 2 + \sqrt{(3)}$.
2) $\sqrt{[43 - 15\sqrt{(8)}]} = 5 - 3\sqrt{(2)}$.
3) $\sqrt{[5 - \sqrt{(24)}]} = \sqrt{(3)} - \sqrt{(2)}$.
4) $\sqrt{[3 - 2\sqrt{(2)}]} = \sqrt{(2)} - 1$.
5) $\sqrt{[28 + 5\sqrt{(12)}]} = 5 + \sqrt{(3)}$.
6) $\sqrt{[87 - 12\sqrt{(42)}]} = 3\sqrt{(7)} - 2\sqrt{(6)}$.
7) $\sqrt{[\frac{3}{2} + \sqrt{(2)}]} = 1 + \frac{1}{2}\sqrt{(2)}$.
8) $\sqrt{[2 + \sqrt{(3)}]} = \frac{1}{2}\sqrt{(6)} + \frac{1}{2}\sqrt{(2)}$.
9) $\sqrt{[\sqrt{(27)} + 2\sqrt{(6)}]} = \sqrt[4]{(12)} + \sqrt[4]{(3)}$ (*).
10) $\sqrt{[\sqrt{(32)} - \sqrt{(24)}]} = \sqrt[4]{(18)} - \sqrt[4]{(2)}$.
11) $\sqrt{[3\sqrt{(5)} + \sqrt{(40)}]} = \sqrt[4]{(20)} + \sqrt[4]{(5)}$.
12) $\sqrt{[3\sqrt{(6)} + 2\sqrt{(12)}]} = \sqrt[4]{(24)} + \sqrt[4]{(6)}$.
13) $\sqrt{[\sqrt{(18)} - 4]} = \sqrt[4]{(8)} - \sqrt[4]{(2)}$.
14) $\sqrt{[a^2 + b + 2a\sqrt{(b)}]} = a + \sqrt{(b)}$.
15) $\sqrt{[ac^2 + bd^2 + 2cd\sqrt{(ab)}]} = c\sqrt{(a)} + d\sqrt{(b)}$.

(*) Здѣсь полагается $A = \sqrt{(27)}$.

16) $\sqrt{[2a + 2\sqrt{(a^2 - b^2)}]} = \sqrt{(a + b)} + \sqrt{(a - b)}$.

17) $\sqrt{[x - 2\sqrt{(x - 1)}]} = \sqrt{(x - 1)} - 1$.

18) $\sqrt{\left[\frac{a^2}{4} + \frac{c}{2}\sqrt{(a^2 - c^2)}\right]} = \frac{c + \sqrt{(a^2 - c^2)}}{2}$.

19) $\sqrt{[x + xy - 2x\sqrt{(y)}]} = [\sqrt{(y)} - 1]\sqrt{(x)}$.

20) $\sqrt{[ap - 2a\sqrt{(ap - a^2)}]} = \sqrt{(ap - a^2)} - a$.

21 $\sqrt{\left[\frac{3a}{b} + \sqrt{\left(\frac{12a^3c^2}{bd^2} - \frac{4a^4c^4}{d^4}\right)}\right]} = \frac{ac}{d} + \sqrt{\left(\frac{3a}{d} - \frac{a^2c^2}{d^2}\right)}$.

22 $\sqrt{\left[b^2 - ab + \frac{a^2}{4} + \sqrt{(4ab^3 - 8a^2b^2 + a^3b)}\right]} =$

$$\sqrt{(ab)} + \sqrt{\left(b^2 - 2ab + \frac{a^2}{4}\right)}.$$

ИЗОБРАЖЕНІЕ КОРЕННЫХЪ ВЕЛИЧИНЪ ПОСРЕДСТВОМЪ ДРОБНЫХЪ ПОКАЗАТЕЛЕЙ, И ДѢЙСТВІЯ НАДЪ ОНЫМЫ.

Хотя степень съ дробнымъ показателемъ можно принять за промежуточный членъ ряда, составленнаго изъ степенныхъ количествъ съ цѣлыми показателями; но кажется, что обыкновенное объясненіе, по которому дробный показатель означаетъ возвышеніе коренной величины въ степень, понятнѣе для начинающихъ. Основываясь на семъ послѣднемъ объясненіи, всѣ дѣйствія надъ таковыми выраженіями, равно какъ и основанная на нихъ теорія логариѳмовъ, могутъ быть съ большою строгостію выражены одними знаками. Впрочемъ, предоставляю судить о справедливости сего мнѣнія болѣе свѣдущимъ математикамъ, и не беру на себя опредѣлить преимущество одного изъ сихъ объясненій предъ другимъ.

---

1. Знакоположеніе.

1) $\sqrt[m]{(a^n)} = a^{\frac{n}{m}}$.

2) $\frac{1}{\sqrt[m]{(a^n)}} = a^{-\frac{n}{m}}$.

3) $\sqrt[m]{(a^n b^p c^q)} = a^{\frac{n}{m}} b^{\frac{p}{m}} c^{\frac{q}{m}} = (a^n b^p c^q)^{\frac{1}{m}}$.

4) $\sqrt[m]{\left(\frac{a^n b^p}{c^r d^s e^t}\right)} = a^{\frac{n}{m}} b^{\frac{p}{m}} c^{-\frac{r}{m}} d^{-\frac{s}{m}} e^{-\frac{t}{m}}$.

5) $c\sqrt[4]{(a^3)} + \frac{d}{\sqrt[7]{(a^2)}} = ca^{\frac{3}{4}} + da^{-\frac{2}{7}}$.

6) $\sqrt[5]{(a^2bc)} = a^{\frac{2}{5}}\ b^{\frac{1}{5}}\ c^{\frac{1}{5}} = (a^2bc)^{\frac{1}{5}}$.

7) $\sqrt[6]{\left(\frac{a^5b^7}{c^{12}}\right)} + \sqrt[8]{\left(\frac{a^6b^4}{d^{20}}\right)} = a^{\frac{5}{6}}\ b^{\frac{7}{6}}\ c^{-2} + a^{\frac{3}{4}}\ b^{\frac{1}{2}}\ d^{-\frac{5}{2}}$.

8) $\frac{\sqrt{(c+d)}}{\sqrt[3]{(c^5)}} = (c+d)^{\frac{1}{2}}\ c^{-\frac{5}{3}}$.

9) $\frac{\sqrt{(a^2-x^2)}}{\sqrt{(a)}\,.\,\sqrt[3]{(a+x)}} = a^{-\frac{1}{2}}\ (a+x)^{-\frac{1}{3}}\ (a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}$.

10) $\frac{\sqrt[3]{(a+b)^7c^4}}{\sqrt[3]{(f^2)}\,.\,\sqrt[6]{(g^2)}} = \frac{c^{\frac{4}{3}}(a+b)^{\frac{7}{3}}}{f^{\frac{2}{3}}g^{\frac{1}{3}}} = c^{\frac{4}{3}}\ f^{-\frac{2}{5}}\ g^{-\frac{1}{3}}\ (a+b)^{\frac{7}{3}}$.

---

2. Дѣйствія надъ дробными степенями.

a) Умноженіе (*).

1) $a^{\frac{m}{n}} \times a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}} = a^{\frac{mq+np}{nq}}$.

(*) Примѣры сложенія и вычитанія надъ количествами съ дробными показателями здѣсь не помѣщены, потому-что не представляютъ особеннаго затрудненія.

2) $a^{\frac{m}{n}} \times a^{-\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}} = a^{\frac{mq-np}{nq}}$.

3) $a^{-\frac{m}{n}} \times a^{-\frac{p}{q}} = a^{-\frac{m}{n}-\frac{p}{q}} = a^{-\left(\frac{m}{n}+\frac{p}{q}\right)} = a^{-\frac{mq+np}{nq}}$.

4) $a^{\frac{3}{4}} \times a^{\frac{5}{3}} = a^{\frac{29}{12}} = a^2 \sqrt[12]{(a^5)}$.

5) $a^{-\frac{1}{2}} \times a^{\frac{7}{4}} \times a^{-\frac{1}{5}} = a^{\frac{21}{20}} = a\sqrt[20]{(a)}$.

6) $a^{-\frac{3}{4}} \times a^{-\frac{7}{8}} = a^{-\frac{13}{8}} = \dfrac{1}{a\sqrt[8]{(a^5)}}$.

7) $a^{-\frac{3}{4}}\, b^{-2} \times a^{\frac{5}{6}}\, b^{\frac{1}{2}}\, c = a^{\frac{1}{12}}\, b^{-\frac{3}{2}}\, c = \frac{c}{b}\sqrt[12]{\left(\frac{a}{b^6}\right)}$.

8) $\dfrac{a}{b^{\frac{4}{2}}\, c^{\frac{5}{4}}} \times \dfrac{a^{\frac{7}{8}} b}{c^{-\frac{1}{2}}} = a^{\frac{15}{8}}\, b^{\frac{1}{2}}\, c^{-\frac{1}{4}} = a^2 \sqrt[8]{\left(\frac{b^4}{ac^2}\right)}$.

9) $\sqrt[5]{(a^{13})} \times \sqrt[7]{(a^3} \times \sqrt[6]{(a^4)} = a^{\frac{13}{5}} . a^{\frac{3}{7}} . a^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{367}{105}}$
$= a^3 \sqrt[105]{(a^{52})}$.

10) $\sqrt[5]{[\sqrt[3]{(a^2)}]} \times \sqrt[6]{[\sqrt[4]{(a^9)}]} = a^{\frac{2}{15}} . a^{\frac{3}{8}} = \sqrt[120]{(a^{61})}$
$= \sqrt{(a)} . \sqrt[120]{(a)}$.

11) $\sqrt[5]{\left[\frac{(c^2-y^2)^3}{(a+x)^3}\right]} \times \sqrt[6]{\left[\frac{(c^2-y^2)^{\frac{5}{2}}}{(a+x)}\right]} = (c^2-y^2)^{\frac{17}{20}}$
$(a+x)^{-\frac{53}{30}} = \dfrac{c^2-y^2}{(a+x)^2}\sqrt[60]{\left[\frac{(a+x)^{14}}{(c^2-y^2)^9}\right]}$.

12) $\dfrac{b}{\sqrt{(a)}} \times \sqrt[3]{(ac)} \times \dfrac{\sqrt[4]{(c^3)}}{\sqrt{(b)}} = ba^{-\frac{1}{2}} \times a^{\frac{1}{3}}\, c^{\frac{1}{3}} \times c^{\frac{3}{4}}\, b^{-\frac{1}{2}}$
$= a^{-\frac{1}{6}}\, b^{\frac{1}{2}}\, c^{\frac{13}{12}} = c\sqrt[12]{\left(\frac{b^6 c}{a^2}\right)}$.

13) $[\sqrt[4]{(a^3)} + \sqrt[5]{(b)}] \times [\sqrt[4]{(a^3)} - \sqrt[5]{(b^2)}] = (a^{\frac{3}{4}} + b^{\frac{2}{5}})$
$\times (a^{\frac{3}{4}} - b^{\frac{2}{5}}) = a^{\frac{3}{2}} - b^{\frac{4}{5}} = a\sqrt{(a)} - \sqrt[5]{(b^4)}$.

14) $\left(5\sqrt[4]{(a^7)} - \frac{6ab}{\sqrt[4]{(a)}}\right) \times \left(\sqrt[3]{(a)} - \frac{7b}{\sqrt[3]{(a^2)}}\right) = (5\,a^{\frac{7}{4}}$
$- 6a^{\frac{3}{4}}\,b) \times (a^{\frac{1}{3}} - 7a^{-\frac{2}{3}}\,b) = 5a^{\frac{25}{12}}$
$- 41a^{\frac{13}{12}}\,b + 42a^{\frac{1}{12}}\,b^2 = (5a^2 - 41ab$
$+ 42b^2)\sqrt[12]{(a)}.$

15) $\left[\sqrt[5]{(ab^3)} + 3\sqrt[5]{\left(\frac{b^8}{a^4}\right)}\right] \times \left[\sqrt{(ab)} + \frac{2}{b^2}\sqrt{\left(\frac{b}{a}\right)}\right]$
$= (a^{\frac{1}{5}}\,b^{\frac{3}{5}} + 3b^{\frac{8}{5}}\,a^{-\frac{4}{5}}) \times (a^{\frac{1}{2}}\,b^{\frac{1}{2}} + 2a^{-\frac{1}{2}}\,b^{-\frac{3}{2}})$
$= a^{\frac{7}{10}}\,b^{\frac{11}{10}} + 2a^{-\frac{3}{10}}\,b^{-\frac{9}{10}} + 3a^{-\frac{3}{10}}\,b^{\frac{21}{10}}$
$+ 6a^{-\frac{13}{10}}\,b^{\frac{1}{10}} = \left(ab + \frac{2}{b} + 3b^2 + \frac{6}{a}\right)\sqrt[10]{\left(\frac{b}{a^3}\right)}.$

16) $\left[\sqrt[6]{\left(\frac{1}{a^3b^2}\right)} - \frac{2\sqrt[3]{(b^2c^3)}}{\sqrt[a]{(a)}}\right] \times \left[\sqrt[5]{(a^2)} - \frac{b}{\sqrt[5]{(a^3)}}\right]$
$= (a^{-\frac{1}{2}}\,b^{-\frac{1}{3}} - 2a^{-\frac{3}{2}}\,b^{\frac{2}{3}}c) \times (a^{\frac{2}{5}} - a^{-\frac{3}{5}}\,b)$
$= a^{-\frac{1}{10}}\,b^{-\frac{1}{3}} - 2a^{-\frac{11}{10}}\,b^{\frac{2}{3}}c - a^{-\frac{11}{10}}\,b^{\frac{2}{3}}$
$+ 2a^{-\frac{21}{20}}\,b^{\frac{5}{3}}\,c = \left(1 - \frac{2bc}{a} - \frac{b}{a}\right.$
$\left. + \frac{2b^2c}{a^2}\right)\sqrt[30]{\left(\frac{1}{a^3b^{10}}\right)}.$

17) $\left[\frac{b}{c}\sqrt[5]{\left(\frac{ad}{f}\right)} - cd\sqrt[3]{\left(\frac{ac}{bg}\right)}\right] \times \left[\sqrt[5]{\left(\frac{ab^5d}{c^5f}\right)} + \sqrt[3]{\left(\frac{ac^4d^3}{bg}\right)}\right]$
$= \left[\frac{(ad)^{\frac{1}{5}}\,b}{cf^{\frac{1}{5}}} - \frac{(ac)^{\frac{1}{3}}cd}{(bg)^{\frac{1}{3}}}\right] \times \left[\frac{(ad)^{\frac{1}{5}}b}{cf^{\frac{1}{5}}} + \frac{(ac)^{\frac{1}{3}}cd}{(bg)^{\frac{1}{3}}}\right]$
$= \frac{(ad)^{\frac{2}{5}}\,b^2}{c^2f^{\frac{2}{5}}} - \frac{(ac)^{\frac{2}{3}}\,c^2d^2}{(bg)^{\frac{2}{3}}} = \frac{b^2}{c^2}\sqrt[5]{\left(\frac{a^2d^2}{f^2}\right)}$
$- c^2d^2\sqrt[3]{\left(\frac{a^2c^2}{b^2g^2}\right)}.$

b) Дѣленіе.

1) $a^{\frac{m}{n}} : a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n} - \frac{p}{q}} = a^{\frac{mq-np}{nq}}$.

2) $a^{\frac{m}{n}} : a^{-\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n} + \frac{p}{q}} = a^{\frac{mq+np}{nq}}$.

3) $a^{-\frac{m}{n}} : a^{\frac{p}{q}} = a^{-\frac{m}{n} - \frac{p}{q}} = a^{-\left(\frac{m}{n} + \frac{p}{q}\right)} = a^{-\frac{mq+np}{nq}}$.

4) $a^{-\frac{m}{n}} : a^{-\frac{p}{q}} = a^{\frac{p}{q} - \frac{m}{n}} = a^{\frac{np-mq}{nq}} = a^{\frac{mq-np}{nq}}$.

5) $ca^{\frac{3}{4}} : da^{\frac{5}{6}} = \frac{ca^{-\frac{1}{12}}}{d} = \frac{c}{d\sqrt[12]{(a)}}$.

6) $a^{\frac{3}{5}} b^{\frac{1}{2}} : a^{-\frac{7}{5}} b^{-\frac{1}{4}} c = \frac{a^2 b^{\frac{3}{4}}}{c} = \frac{a^2}{c} \sqrt[4]{(b^3)}$.

7) $h : \frac{a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{4}}}{cd^{\frac{1}{2}}} = \frac{ch\sqrt{(d)}}{\sqrt[12]{(a^4 b^3)}}$.

8) $\frac{a^{-\frac{9}{2}} b^{\frac{2}{5}}}{c^{\frac{1}{6}} d^3} : \frac{a^{-\frac{29}{4}} d^{\frac{11}{3}}}{b^{\frac{8}{5}} c} = \frac{a^{\frac{14}{4}} b^{\frac{34}{15}} c}{c^{\frac{1}{6}} d^{\frac{20}{5}}} = \frac{a^3 b^2 c}{d^7} \sqrt[60]{\left(\frac{b^{16} d^{20}}{a^{15} c^{10}}\right)}$

$= \frac{a^3 b^2 c}{d^7} \sqrt[12]{\left(\frac{d^4}{a^3 c^2}\right)} \cdot \sqrt[15]{(b^4)}$.

9) $[a^3 - 2\sqrt[4]{(a^2 b^3)} - a^2 \sqrt[6]{(a^3 b^2)} + 2b\sqrt[12]{(b)}] : [\sqrt{(a)} - \sqrt[3]{(b)}] = (a^3 - 2a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{3}{4}} - a^{\frac{5}{2}} b^{\frac{1}{3}} + 2b^{\frac{13}{12}})$
$: (a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{3}}) = a^{\frac{5}{2}} - 2b^{\frac{3}{4}} = a^2 \sqrt{(a)} - 2\sqrt[4]{(b^3)}$.

10) $\left[\sqrt[12]{(a^{10} b^9)} - c\sqrt[10]{(a^7)} \cdot \sqrt[6]{(b^5)} - \frac{3}{2} a \sqrt[4]{(b^3)} + \frac{3abc}{2} \sqrt[30]{\left(\frac{1}{a^4 b^5}\right)}\right] : [\sqrt{(ab)} - \frac{3}{2} \sqrt[6]{(a^4 b^3)}]$
$= \left(a^{\frac{5}{6}} b^{\frac{3}{4}} - ca^{\frac{7}{10}} b^{\frac{5}{6}} - \frac{3}{2} ab^{\frac{3}{4}}\right) + \frac{3}{2}\left(ca^{\frac{13}{15}} b^{\frac{5}{6}}\right)$
$: \left(a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}} - \frac{3}{2} a^{\frac{2}{3}} b^{\frac{1}{2}}\right) = a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{4}} - ca^{\frac{1}{5}} b^{\frac{1}{3}}$
$= \sqrt[12]{(a^4 b^3)} - c\sqrt[15]{(a^3 b^5)}$.

11) $5a^2 - 41ab + 42b^2) \sqrt[12]{(a)} : \left(\sqrt[3]{(a)} - \frac{7b}{\sqrt[3]{(a^2)}}\right)$

$= \left(5a^{\frac{25}{12}} - 41a^{\frac{13}{12}}b + 42a^{\frac{1}{12}}b^2\right) : \left(a^{\frac{1}{3}} - 7ba^{-\frac{2}{3}}\right)$

$= 5a^{\frac{7}{4}} - 6a^{\frac{3}{4}}b = (5a - 6b)\sqrt[4]{(a^3)}.$

12) $\left[\sqrt[4]{(a^3)} - \sqrt[4]{(b^3)}\right] : \left[\sqrt[4]{(a)} - \sqrt[4]{(b)}\right] = \left(a^{\frac{3}{4}} - b^{\frac{3}{4}}\right)$

$: \left(a^{\frac{1}{4}} - b^{\frac{1}{4}}\right) = a^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{2}} = \sqrt{(a)}$

$+ \sqrt{(b)} + \sqrt[4]{(ab)}.$

c) Степени степеней.

1) $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{\left[\sqrt[n]{(a^m)}\right]^p} = a^{\frac{mp}{nq}} = \sqrt[nq]{(a^{mp})}.$

2) $\left(a^{-\frac{m}{n}}\right)^{\frac{q}{q}} = \sqrt[q]{\left(\frac{1}{\sqrt[n]{(a^m)}}\right)^p} = a^{-\frac{mp}{nq}} = \frac{1}{\sqrt[nq]{(a^{mp})}}.$

3) $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{-\frac{p}{q}} = \frac{1}{\sqrt[q]{\left[\sqrt[n]{(a^m)}\right]^p}} = a^{-\frac{mp}{nq}} = \frac{1}{\sqrt[nq]{(a^{mp})}}.$

4) $\left(a^{-\frac{m}{n}}\right)^{-\frac{p}{q}} = \frac{1}{\sqrt[q]{\left(\frac{1}{\sqrt[n]{(a^m)}}\right)^p}} = a^{\frac{mp}{nq}} = \sqrt[nq]{(a^{mp})}.$

5) $\left(a^{\frac{3}{4}}\, b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{4}}\, b^{\frac{2}{9}} = \sqrt[36]{(a^9 b^8)}.$

6) $\left(a^2\, b^{-\frac{1}{2}}\, c^{\frac{2}{5}}\right)^{-\frac{1}{4}} = a^{-\frac{1}{2}}\, b^{\frac{1}{8}}\, c^{-\frac{1}{10}} = \sqrt[40]{\left(\frac{b^5}{a^{20}c^4}\right)}.$

7) $\left[(a^{\frac{1}{2}})^{\frac{3}{5}}\right]^{-\frac{1}{6}} = a^{\frac{1}{20}} = \sqrt[20]{\left(\frac{1}{a}\right)}.$

8) $\sqrt[6]{\left[(a^3 b \sqrt[5]{(a^3 bc)}\right]^5} = \left(a^{\frac{18}{5}}\, b^{\frac{6}{5}}\, c^{\frac{1}{5}}\right)^{\frac{5}{6}} = a^3 bc^{\frac{1}{6}}$

$= a^3 b \sqrt[6]{(c)}.$

$$9)\ \left(\frac{c^2d}{(a+b)^{\frac{3}{2}}}\right)^{-\frac{1}{3}} = \frac{c^{-\frac{2}{3}}d^{-\frac{1}{3}}}{(a+b)^{-\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{(a+b)}}{\sqrt[3]{(c^2d)}} = \sqrt[6]{\left(\frac{(a+b)^3}{c^4d^2}\right)}.$$

$$10)\ \sqrt[4]{\left(\frac{a\sqrt{(b)}}{\sqrt[3]{(ab)}}\right)^3} = \left(a^{\frac{2}{3}}\ b^{\frac{1}{6}}\right)^{\frac{3}{4}} = a^{\frac{1}{2}}\ b^{\frac{1}{8}} = \sqrt[8]{(a^4b)}.$$

$$11)\ \sqrt[4]{\left(\frac{\sqrt{(c-d)}\ .\ \sqrt[3]{(a+x^2)^4}}{c^6d^{5m}}\right)} = \left(\frac{(c-d)^{\frac{1}{2}}(a+x^2)^{\frac{4}{3}}}{c^6d^{5m}}\right)^{\frac{1}{4}}$$

$$= \frac{(c-d)^{\frac{1}{8}}\ (a+x^2)^{\frac{1}{3}}}{c^{\frac{3}{2}}d^{\frac{5m}{4}}} = \frac{1}{cd^m}\sqrt[24]{\left(\frac{(c-d)^3(a+x^2)^8}{c^{12}d^{6m}}\right)}.$$

ДѢЙСТВІЯ НАДЪ МНИМЫМИ ВЕЛИЧИНАМИ.

Четной степени корень изъ отрицательной величины невозможенъ, и называется мнимою величиною. — При вычисленіи встрѣчаются иногда таковыя величины, когда условія вопроса, или принятый видъ для результата невозможны. Въ послѣднемъ случаѣ онѣ по одному только виду кажутся мнимыми, но, несмотря на то, чрезъ дальнѣйшія преобразованія могутъ привести къ выводамъ возможнымъ, если только получаются посредствомъ ряда вѣрныхъ заключеній, основанныхъ на справедливыхъ началахъ. Онѣ при вычисленіи бываютъ иногда весьма полезны, ибо разсматриваніе оныхъ можетъ иногда привести, какъ бы случайно, къ открытію новыхъ истинъ, которыя хотя и могутъ быть доказаны другимъ, но болѣе сложнымъ способомъ.

Извѣстно, что $\sqrt{(-a)} = \sqrt{(a)} \cdot \sqrt{(-1)}$. Можно также строго доказать, что всѣ мнимыя величины могутъ быть приведены къ виду: $h + k\sqrt{(-1)}$, гдѣ h и k величины возможныя, при каковомъ видѣ вычисленія весьма облегчаются.

---

1. Сложенiе и вычитанiе.

1) $a + b\sqrt{(-1)} + c\sqrt{(-1)} - d\sqrt{(-1)} = a + (b + c - d)\sqrt{(-1)}$.

2) $3\sqrt{(-4)} - \sqrt{(-25)} + 4\sqrt{(-9)} = 13\sqrt{(-1)}$.

3) $2\sqrt{(-48)} + 3\sqrt{(-12)} + 5\sqrt{(-8)} - 7\sqrt{(-32} = [14\sqrt{(3)} - 18\sqrt{(2)}]\sqrt{(-1)}$.

---

2. Умноженiе.

1) $a \times \sqrt{(-a)} = a \cdot \sqrt{(-1)}$.

2) $c\sqrt{(-a)} \times d\sqrt{(-b)} = c\sqrt{(a)} \cdot \sqrt{(-1)} \times d\sqrt{(b)} \cdot \sqrt{(-1)} = -cd\sqrt{(ab)}$.

3) $(c\sqrt{(-a)} + d\sqrt{(-b)} + f)\sqrt{(-a)} = -ac - d\sqrt{(ab)} + f\sqrt{(a)} \cdot \sqrt{(-1)}$.

4) $[2 - \sqrt{(-3)}] \times [10 - \sqrt{(-8)}] = 20 - \sqrt{(24)} - [10\sqrt{(3)} + 4\sqrt{(2)}]\sqrt{(-1)}$.

5) $[7 - \sqrt{(-5)}] \times [10 - 3\sqrt{(-6)}] = 70 - 3\sqrt{(30)} - [10\sqrt{(5)} + 21\sqrt{(6)}]\sqrt{(-1)}$.

6) $[3 - \sqrt{(-5)}] \times [4 - 2\sqrt{(-5)}] = 2 - 10\sqrt{(5)} \cdot \sqrt{(-1)}$.

7) $[2 - 5\sqrt{(-3)}] \times [7 - 4\sqrt{(-3]} = -46 - 43\sqrt{(3)} \cdot \sqrt{(-1)}$.

8) $[9 + 6\sqrt{(-1)}] \times [3 + 7\sqrt{(-1)}] = -15 + 81\sqrt{(-1)}$.

9) $[7 - \sqrt{(-\frac{1}{2})}] \times (1 - \sqrt{(-\frac{1}{2})}] = \frac{13}{2} - 4\sqrt{(2)} \cdot \sqrt{(-1)}$.

10) $[1 - \sqrt{(-1)}]^2 = -2\sqrt{(-1)}$.

11) $[\sqrt{(2)} - 3\sqrt{(-5)}] \times [\sqrt{(7)} - \sqrt{(-3)}] = \sqrt{(14)} - 3\sqrt{(15)} - [3\sqrt{(35)} + \sqrt{(6)}]\sqrt{(-1)}$.

12) $[2\sqrt{(3)} - \sqrt{(-5)}] \times [4\sqrt{(3)} - 2\sqrt{(-5)}] = 14 - 8\sqrt{(-15)}$.

13) $[2\sqrt{(-3)} - 5\sqrt{(-4)} - 7\sqrt{(-2)}] \times [\sqrt{(-7)} - 2\sqrt{(-1)}] = -2\sqrt{(21)} + 5\sqrt{(28)} + 7\sqrt{(14)} + 4\sqrt{(3)} - 20 - 14\sqrt{(2)}$.

14) $(\sqrt{(a)} \cdot \sqrt{(-1)} + \sqrt{(b)} \cdot \sqrt{(-1)})^2 = -[a + b + 2\sqrt{(ab)}]$.

15) $[a + \sqrt{(b)} \cdot \sqrt{(-1)}] \times [a - \sqrt{(b)} \cdot \sqrt{(-1)}] = a^2 + b$.

16) $[a \pm \sqrt{(b)} \cdot \sqrt{(-1)}]^2 = a^2 - b \pm 2a \cdot \sqrt{(b)} \cdot \sqrt{(-1)}$.

17) $[a \pm \sqrt{(b)} \cdot \sqrt{(-1)}]^3 = a^3 - 3ab \pm [3a^2\sqrt{(b)} - b\sqrt{(b)}]\sqrt{(-1)}$.

18) $[a\sqrt{(-1)}]^{4n} = a^{4n}$.

19) $[a\sqrt{(-1)}]^{4n+1} = a^{4n+1}\sqrt{(-1)}$.

20) $[a\sqrt{(-1)}]^{4n+2} = -a^{4n+2}$.

21) $[a\sqrt{(-1)}]^{4n+3} = -a^{4n+3}\sqrt{(-1)}$.

---

3. Дѣленіе.

1) $b\sqrt{(-1)} : c\sqrt{(-1)} = \frac{b}{c}$.

2) $1 : \sqrt{(-1)} = -\sqrt{(-1)}$.

3) $a : b\sqrt{(-1)} = -\frac{a}{b}\sqrt{(-1)}$.

4) $a : \sqrt{(a)} \cdot \sqrt{(-1)} = -\sqrt{(a)} \cdot \sqrt{(-1)}$.

5) $[\sqrt{(-12)} + \sqrt{(-6)} + \sqrt{(-9)}] : \sqrt{(-3)} = 2 + \sqrt{(2)} + \sqrt{(3)}$.

6) $[2\sqrt{(8)} - \sqrt{(-10)}] : -\sqrt{(-2)} = \sqrt{(5)} - 4\sqrt{(-1)}$.

7) $[3\sqrt{(-4)} - 2\sqrt{(-12)} + \sqrt{(6)} - 9] : -3\sqrt{(-2)} = -\sqrt{(2)} + \frac{2}{3}\sqrt{(6)} + \left(\frac{1}{3}\sqrt{(3)} - \frac{3}{\sqrt{(2)}}\right)\sqrt{(-1)}$.

8) $6 : [1 + \sqrt{(-2)}] = 2 - 2\sqrt{(2)} \cdot \sqrt{(-1)}$.

9) $8 : [-1 + \sqrt{(-3)}] = -2 - 2\sqrt{(3)} \cdot \sqrt{(-1)}$.

10) $1 : [3 - 2\sqrt{(-3)}] = \frac{3 + 2\sqrt{(3)} \cdot \sqrt{(-1)}}{21}$.

11) $14 : [4\sqrt{(-3)} - 2\sqrt{(-5)}] = -[2\sqrt{(3)} + \sqrt{(5)}]\sqrt{(-1)}$.

12) $[5 - \sqrt{(-2)}] : [1 + \sqrt{(-2)}] = 1 - 2\sqrt{(2)} \cdot \sqrt{(-1)}$.

13) $[4\sqrt{(5)} - 20] : [\frac{3}{2}\sqrt{(-10)} - 5\sqrt{(-\frac{1}{2})}] = [\sqrt{(10)} + \sqrt{(2)}]\, 2\sqrt{(-1)}$.

14) $[14 - \sqrt{(15)} - [7\sqrt{(3)} + 2\sqrt{(5)}]\sqrt{(-1)}] : [7 - \sqrt{(5)} \cdot \sqrt{(-1)}] = 2 - \sqrt{(3)} \cdot \sqrt{(-1)}$.

15) $1 : [2 + [\sqrt{(3)} - \sqrt{(5)}]\sqrt{(-1)}] = \frac{12 + 2\sqrt{(15)} + [3\sqrt{(5)} - (3)]\sqrt{(-1)}}{42}$.

---

4. Квадратный корень изъ бинома, имѣющаго видъ $A + B\sqrt{(-1)}$.

Формула.

$$\sqrt{[A + B\sqrt{(-1)}]} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{(A^2 + B^2)} + A}{2}\right)} + \sqrt{\left(\frac{\sqrt{(A^2 + B^2)} - A}{2}\right)} \cdot \sqrt{(-1)}.$$

Примѣры.

1) $\sqrt{[7 + 6\sqrt{(-2)}]} = \sqrt{[7 + 6\sqrt{(2)} \cdot \sqrt{(-1)}]} = 3 + \sqrt{(2)} \cdot \sqrt{(-1)}$.

2) $\sqrt{[31 + 42\sqrt{(-2)}]} = 7 + 3 \cdot \sqrt{(2)} \cdot \sqrt{(-1)}$.

3) $\sqrt{[16 - 24\sqrt{(-5)}]} = 6 - 2\sqrt{(5)} \cdot \sqrt{(-1)}$.

4) $\sqrt{[-3 + \sqrt{(-16)}]} = 1 + 2\sqrt{(-1)}$.

5) $\sqrt{}\,[4\sqrt{}\,(-6) - 2] = 2 + \sqrt{}\,(6) \cdot \sqrt{}\,(-1)$.

6) $\sqrt{}\,[-83 - 60\sqrt{}\,(-3)] = 5 - 6\sqrt{}\,(3) \cdot \sqrt{}\,(-1)$.

7) $\sqrt{}\,[2 + 4\sqrt{}\,(-42)] = \sqrt{}\,(14) + 2\sqrt{}\,(3) \cdot \sqrt{}\,(-1)$.

8) $\sqrt{}\,[-2 - 2\sqrt{}\,(-15)] = \sqrt{}\,(3) - \sqrt{}\,(5) \cdot \sqrt{}\,(-1)$.

9) $\sqrt{}\left[\frac{a^2c}{b^2} - cd + \frac{ac\sqrt{}\,(4d)}{b}\sqrt{}\,(-1)\right] = \frac{a}{b}\sqrt{}\,(c) + \sqrt{}\,(cd) \cdot \sqrt{}\,(-1)$.

10) $\sqrt{}\left[\frac{25a^2d}{c^2} - \frac{4a^2b}{d} - \frac{20a^2\sqrt{}\,(b)}{c}\sqrt{}\,(-1)\right] = \frac{5a\sqrt{}\,(d)}{c} - 2a\sqrt{}\left(\frac{b}{d}\right) \cdot \sqrt{}\,(-1)$.

11) $\sqrt{}\,[a^4f^4 - a^3b^2 - a^2b^3 - 2a^3bf^2\sqrt{}\,(a+b) \cdot \sqrt{}\,(-1)] = a^2f^2 - ab\sqrt{}\,(a+b) \cdot \sqrt{}\,(-1)$.

12) $\sqrt{}\,(-1) = \sqrt{}\,[0 + \sqrt{}\,(-1)] = \sqrt{}\,(\frac{1}{2}) + \sqrt{}\,(\frac{1}{2}) \cdot \sqrt{}\,(-1)$.

13) $\sqrt{}\,[-\sqrt{}\,(-1)] = \sqrt{}\,[0 - \sqrt{}\,(-1)] = \sqrt{}\,(\frac{1}{2}) - \sqrt{}\,(\frac{1}{2}) \cdot \sqrt{}\,(-1)$.

14) $\sqrt{}\,[8\sqrt{}\,(-1)] = \sqrt{}\,[0 + 8\sqrt{}\,(-1)] = 2 + 2\sqrt{}\,(-1)]$.

15) $\sqrt{}\left[\frac{2c^2}{d^2} \cdot \sqrt{}\,(-1)\right] = \frac{c}{d}\,[1 + \sqrt{}\,(-1)]$.

16) $\sqrt{}\,[2cd\sqrt{}\,(-1)] = [1 + \sqrt{}\,(-1)]\sqrt{}\,(cd)$.

17) $\sqrt{}\,[2 + \sqrt{}\,(-3)] = \sqrt{}\left(\frac{\sqrt{}\,(7) + 2}{2}\right) + \sqrt{}\left(\frac{\sqrt{}\,(7) - 2}{2}\right) \cdot \sqrt{}\,(-1)$.

18) $\sqrt{}\,[5 - \sqrt{}\,(-1)] = \sqrt{}\left(\frac{\sqrt{}\,(26) + 5}{2}\right) - \sqrt{}\left(\frac{\sqrt{}\,(26) - 5}{2}\right) \cdot \sqrt{}\,(-1)$.

5. Различныя приведенія къ простѣйшему виду.

1) $\sqrt{(ax)} + \frac{ax}{a - \sqrt{(ax)}} = \frac{a\sqrt{(ax)}}{a - \sqrt{(ax)}} - \frac{a\sqrt{(x)}}{\sqrt{(a)} - \sqrt{(x)}}$.

2) $\frac{c\sqrt{(x)}}{\sqrt{(a+x)}} + \frac{d\sqrt{(x)}}{\sqrt{(a-x)}} + \frac{a\sqrt{(ax^3+x^4)}}{\sqrt{(a^2-x^2)}} - \sqrt{(a^2-x^2)}$

$$= \frac{c\sqrt{(ax-x^2)} + (ax+d)\sqrt{(ax+x^2)} + x^2 - a^2}{\sqrt{(a^2-x^2)}}.$$

3) $\frac{2x^2}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{3x^2-1}{(1-x^2)\sqrt{(1-x^2)}}$.

4) $\frac{ax^3}{(a+x)^{\frac{8}{3}}} + \frac{bx^2}{(a+x)^{\frac{5}{3}}} + \frac{cx}{(a+x)^{\frac{2}{3}}} =$

$$\frac{(a+b+c)x^3 + (ab+2ac)x^2 + a^2cx}{(a+x)^2\sqrt[3]{(a+x)^2}}.$$

5) $\sqrt{\left(1 - \frac{f^2}{(f-g)^2}\right)} = \frac{\sqrt{(g^2-2fg)}}{f-g}$.

6) $\frac{a+\sqrt{(-b)}}{a-\sqrt{(-b)}} = \frac{a^2-b+2a\sqrt{(-b)}}{a^2+b}$.

7) $\frac{a+\sqrt{(-b)}}{a-\sqrt{(-b)}} + \frac{a-\sqrt{(-b)}}{a+\sqrt{(-b)}} = \frac{2(a^2-b)}{a^2+b}$.

8) $\frac{\sqrt{(a+x)}+\sqrt{(a-x)}}{\sqrt{(a+x)}-\sqrt{(a-x)}} = \frac{a+\sqrt{(a^2-x^2)}}{x}$.

9) $\frac{b}{\sqrt[n]{[a-\sqrt{(a^2-b^n)}]}} = \sqrt[n]{[a+\sqrt{(a^2-b^n)}]}$.

10) $\sqrt{[a+\sqrt{(b)}]} \pm \sqrt{[a-\sqrt{(b)}]} = \sqrt{[2a \pm 2\sqrt{(a^2-b)}]}$ (*).

(*) Это выраженіе можно привести къ простѣйшему виду двоякимъ образомъ: 1) извлекая квадратный корень какъ изъ $a+\sqrt{(b)}$, такъ изъ $a-\sqrt{(b)}$ и слагая оба корня, и 2) возвышая все выраженіе въ квадратъ и поставляя передъ полученною величиною знакъ квадратнаго корня. Это же самое относится и къ слѣдующимъ двумъ выраженіямъ.

11) $\sqrt{[a+\sqrt{(-b)}]} \pm \sqrt{[a-\sqrt{(-b)}]} = \sqrt{[2a \pm 2\sqrt{(a^2+b)}]}$.

12) $\sqrt{\left[\frac{abf+c^2}{bc}+\sqrt{\left(\frac{4af}{b}\right)}\right]}+\sqrt{\left[\frac{abf+c^2}{bc}-\sqrt{\left(\frac{4af}{b}\right)}\right]} = \sqrt{\left(\frac{4af}{c}\right)}$.

13) $\dfrac{\frac{a}{b}+\frac{c}{d}}{\frac{e}{f}+\frac{g}{h}} = \dfrac{(ad+bc)fh}{(eh+fg)bd}$.

14) $\dfrac{\frac{a}{b}+\frac{c}{d}+\frac{e}{f}}{\frac{g}{h}+\frac{i}{k}+\frac{l}{m}} = \dfrac{(adf+bcf+bde)hkm}{(gkm+him+hkl)bdf}$.

15) $\dfrac{\frac{a^3f^3}{b^2c^2}-\frac{a^4f}{bc}+a^2c}{\frac{a^2g}{bc^2d}-\frac{a^6c}{b^2g^2h}+\frac{a^3}{bc}} = \dfrac{(af^3-a^2bcf+b^2c^3)dg^2h}{bg^3h-a^4c^3d+abcdg^2h}$.

16) $\dfrac{\frac{a}{a-b}+\frac{b}{a+b}}{\frac{a}{a-b}-\frac{b}{a+b}} = \dfrac{a^2+2ab-b^2}{a^2+b^2}$.

17) $\dfrac{\frac{c^2}{d^2}-\frac{c^3}{a+b}}{\frac{c^2}{a+b}-\frac{c^4}{dh^2}} = \dfrac{(a+b-cd^2)h^2}{d^2h^2-(a+b)\,c^2d}$.

18) $\dfrac{1+\frac{\sqrt{(a^2-x^2)}}{\sqrt{(a^2+x^2)}}}{\sqrt{(a^2+x^2)}+\sqrt{(a^2-x^2)}} = \dfrac{1}{\sqrt{(a^2+x^2)}}$.

19) $\dfrac{\sqrt{(1-x)}+\frac{1}{\sqrt{(1+x)}}}{1+\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}} = \sqrt{(1-x)}$.

20) $\dfrac{a^2+ax+x^2}{a^4+a^3x+a^2x^2+ax^3+x^4} = \dfrac{a^3-x^3}{a^5-x^5}$.

21) $\frac{a^2 - 2ax + 4x^2}{a^3 - 2a^2x + 4ax^2 - 8x^3} = \frac{a^3 + 8x^3}{a^4 - 16x^4}$.

22) $\frac{a^3 - a^2x + ax^2 - x^3}{a^5 - a^4x + a^3x^2 - a^2x^3 + ax^4 - x^5} = \frac{a^4 - x^4}{a^6 - x^6}$.

23) $9\sqrt{[6\sqrt{(28)}]} + 3\sqrt{[12\sqrt{(7)}]} - 8\sqrt{[4\sqrt{(63)}]} = 8\sqrt[4]{(63)}$.

24) $3\sqrt{[40\sqrt{(12)}]} + 2\sqrt{[5\sqrt{(48)}]} - 4\sqrt{[15\sqrt{(27)}]} = 4\sqrt[4]{(75)}$.

25) $4\sqrt[3]{[6\sqrt{(32)}]} + \sqrt[3]{[9\sqrt{(162)}]} + 2\sqrt[3]{[75\sqrt{(50)}]} = 21\sqrt[6]{(18)}$.

26) $5\sqrt[3]{[4\sqrt[3]{(192)}]} + 7\sqrt[3]{[18\sqrt[3]{(81)}]} = 31\sqrt[9]{(24)}$.

27) $3\sqrt[3]{[8 + 16\sqrt{(5)}]} - 2\sqrt[3]{[1 + \sqrt{(20)}]} = 4\sqrt[3]{[1 + 2\sqrt{(5)}]}$.

28) $3\sqrt[3]{[54 - 36\sqrt{(27)}]} - \sqrt[3]{[16 - 16\sqrt{(12)}]} = 7\sqrt[3]{[2 - 4\sqrt{(3)}]}$.

29) $(aa' + bb')^2 + (ab' - ba')^2 = (a^2 + b^2)(a'^2 + b'^2)$ (*).

30) $(aa' + bb')^2 + (ab' - ba')^2 + a'^2c^2 + b'^2c^2 = (a^2 + b^2 + c^2)(a'^2 + b'^2)$.

31) $(aa' + bb' + cc')^2 + (ab' - ba')^2 + (ac' - ca')^2 + (bc' - cb')^2 = (a^2 + b^2 + c^2)(a'^2 + b'^2 + c'^2)$.

(*) Для симетріи величины иногда означаются буквами со знаками; но въ такомъ случаѣ подъ буквами a, b, c, и проч. a', b', c', и проч. a'', b'', c'', и проч. разумѣются вообще величины совершенно между собою различныя, хотя въ нѣкоторыхъ случаяхъ оныя могутъ быть и равными.

32) $(aa' + bb' + cc' + dd')^2 + (ab' - ba' + cd' - dc')^2 + (ac' - bd' - ca' + db')^2 + (ad' + bc' - cb' - da')^2 = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(a'^2 + b'^2 + c'^2 + d'^2)$.

33) $(a^2 + Ab^2)(a'^2 + Ab'^2) = (aa' \pm Abb')^2 + A(ab' \mp ba')^2$ (*).

34) $ab' - ba')(ab'' - ba'') + (bc' - cb')(bc'' - cb'') + (ca' - ac')(ca'' - ac'') = (a^2 + b^2 + c^2)(a'a'' + b'b'' + c'c'') - (aa' + bb' + cc')(aa'' + bb'' + cc'')$.

О ЛОГАРИѲМАХЪ.

Что называется логариѳмомъ какого-нибудь числа? Что такое его основаніе? — Какъ понимать: логариѳмъ числа $N = 6{,}67$ при основаніи a? — Что называется логариѳмическою системою? И въ особенности какая называется системою Генриха Бригга? — Какъ нижепоказанныя три главныя формулы выразить словами? и какъ ихъ доказать? — Возможно ли за основаніе системы взять единицу? — Чему равенъ логариѳмъ единицы? — Ежели основаніе болѣе единицы, то логариѳмъ числа большаго единицы будетъ положительнымъ, а числа меньшаго — единицы отрицательнымъ. — Ежели же основаніе будетъ менѣе единицы, то въ семъ случаѣ каковы логариѳмы чиселъ? — Весьма немногіе лога-

---

(*) Посредствомъ формулъ 29-й, 30-й, 31-й, 32-й и 33-й можно рѣшить нѣкоторыя задачи изъ неопредѣленной аналитики, о которыхъ будетъ упомянуто далѣе. Въ вѣрности оныхъ можно удостовѣриться чрезъ возвышеніе въ квадратъ и умноженіе самымъ дѣломъ, причемъ употребляются небольшія облегченія, которыя не трудно усмотрѣть самому при нѣкоторомъ вниманіи.

риѳмы бываютъ цѣлыя числа, прочія же состоятъ вообще изъ цѣлаго числа и дроби, а въ системѣ Бригга изъ несоизмѣримой дроби, т. е. такой, которой нельзя опредѣлить точнымъ образомъ. — Какъ называется цѣлое число, и какъ дробь? — Какъ опредѣлить въ Бригговой системѣ логариѳмовъ, характеристику числа, содержащагося между 10^n и 10^{n+1}, и характеристику дроби, содержащейся между $\frac{1}{10^n}$ и $\frac{1}{10^{n+1}}$.

Ежели разность между числами очень мала въ сравненіи съ сими самыми числами, то разности логариѳмовъ почти пропорціональны разностямъ чиселъ. Это свойство можетъ быть доказано только посредствомъ высшей алгебры. Къ чему служатъ находящіяся въ пространныхъ логариѳмическихъ таблицахъ пропорціональныя части?

---

1. Главныя формулы.

1) $\log AB = \log A + \log B$.

2) $\log \frac{A}{B} = \log A - \log B$.

3) $\log A^n = n \log A$.

Примѣч. Въ 3) n можетъ быть положительнымъ, отрицательнымъ, цѣлымъ или дробнымъ числомъ.

---

2. Приложеніе сихъ формулъ къ опредѣленію логариѳмовъ произведеній, частныхъ, степеней и корней.

a) Примѣры для общихъ или алгебраическихъ выраженій.

1) $\log abcd = \log a + \log b + \log c + \log d$.

2) $\log \frac{fg}{cd} = \log f + \log g - \log c - \log d$.

3) $\log a^m b^n c^p = m \log a + n \log b + p \log c.$

4) $\log \frac{a^m b^{-n}}{c^p d^q} = m \log a - n \log b - p \log c - q \log d.$

5) $\log a^{\frac{m}{n}} b^{-\frac{p}{q}} c = \frac{m}{n} \log a - \frac{p}{q} \log b + \log c.$

6) $\log \sqrt[n]{a^m b^{-n} c^{\frac{p}{q}}} = \frac{m}{n} \log a - \log b + \frac{p}{nq} \log c.$

7) $\log \frac{a \sqrt[n]{(c^m)}}{b \sqrt{(d)}} = \log a + \frac{m}{n} \log c - \log b - \frac{1}{2} \log d.$

8) $\log \frac{(a+b)^n c^m}{(c+d) \sqrt[4]{(d^3)}} = n \log (a+b) + m \log c - \log (c+d) - \frac{3}{4} \log d.$

9) $\log \frac{1}{(a+b^n)^m} = - m \log (a+b^n).$

10) $\log \frac{1}{\sqrt[n]{(a+b)}} = - \frac{1}{n} \log (a+b).$

11) $\log \sqrt[m]{(a^2 - x^2)} = \frac{1}{m} \log (a^2 - x^2) = \frac{1}{m} \log (a+x) + \frac{1}{m} \log (a-x).$

12) $x \log a = \log a^x.$

13) $n \log a + m \log b - p \log c = \log \frac{a^n b^m}{c^p}.$

14) $n \log (a+y) + \log c - m \log (a-y = \log \frac{c(a+y)^n}{(a-y)^m}.$

15) $\frac{1}{n} \log (2a+3b) - \frac{2}{3} \log c = \log \frac{\sqrt[n]{(2a+3b)}}{\sqrt[3]{(c^2)}}$

b) Примѣры для численныхъ выраженій по системѣ Бригга.

1) $\log (93 \times 3514) = 5{,}5142847.$

2) $\log (1225 \times 387) = 5{,}6758471.$

3) $\log (628 \times 493) = 5,4908066.$

4) $\log (3748 \times 1752 \times 4065) = 10,4263942.$

5) $\log \frac{5}{4} = 0,0969100.$

6) $\log \frac{39}{7} = 0,7459666.$

7) $\log \frac{14}{3} = 0,6690068.$

8) $\log 15\frac{3}{4} = 1,1972806.$

9) $\log 7\frac{4}{13} = 0,8637803.$

10) $\log 367\frac{5}{8} = 2,5654050.$

11) $\log 187\frac{9}{11} = 2,2737376.$

12) $\log \frac{2}{3} = 0,8239087 - 1.$

13) $\log \frac{5}{8} = 0,7958800 - 1.$

14) $\log \frac{1}{9} = 0,0457575 - 1.$

15) $\log \frac{1}{26} = 0,5850267 - 2.$

16) $\log \frac{6}{37} = 0,2099495 - 1.$

17) $\log \frac{18}{1267} = 0,1524959 - 2.$

18) $\log \frac{357}{695} = 0,7106834 - 1.$

19) $\log \frac{1}{5432} = 0,2650402 - 4.$

20) $\log \frac{8}{9243} = 0,9372770 - 4.$

21) $\log \frac{3542}{7965} = 0,6480628 - 1.$

22) $\log 3,5 = 0,5440680.$

23) $\log 12,63 = 1,1014034.$

24) $\log 15,432 = 1,1884222.$

25) $\log 7348{,}4 = 3{,}8661928.$

26) $\log 1{,}3567 = 0{,}1324838.$

27) $\log 0{,}7 = 0{,}8450980 - 1.$

28) $\log 0{,}036 = 0{,}5563025 - 2.$

29) $\log 0{,}0065 = 0{,}8129134 - 3.$

30) $\log 0{,}0039953 = 0{,}6015494 - 3.$

31) $\log 0{,}0005637 = 0{,}7510480 - 4.$

32) $\log \frac{319 \times 765}{138} = 3{,}2475730.$

33) $\log \frac{213 \times 7{,}655}{3145 \times 718} = 0{,}8585798 - 4.$

34) $\log \frac{3{,}5347 \times 2{,}685}{137{,}65 \times 5944} = 0{,}0644419 - 5.$

35) $\log \frac{47 \times 0{,}653 \times 12\frac{5}{6}}{3576 \times 1520} = 0{,}8601095 - 5.$

36) $\log \frac{0{,}765 \times 0{,}0018}{31457 \times 567\frac{3}{12}} = 0{,}8873146 - 11.$

37) $\log \frac{0{,}018594 \times 763\frac{13}{15}}{7654{,}3 \times 794} = 0{,}3686643 - 6.$

38) $\log 3^{15} = 7{,}1568188$ (*).

39) $\log 5^{27} = 18{,}8721901.$

40) $\log 16^{20} = 24{,}0823997.$

41) $\log \left(\frac{7}{3}\right)^{14} = 5{,}1516750.$

42) $\log \left(\frac{15}{13}\right)^{16} = 0{,}9943665.$

43) $\log \left(\frac{12}{5}\right)^{32} = 12{,}1667597.$

44) $\log \left(\frac{3}{4}\right)^{30} = 0{,}2518379 - 4.$

(*) Замѣтимъ, что если при вычисленіи будемъ употреблять таблицы, въ которыхъ логариѳмы содержатъ только 7 десятичныхъ цифръ, то при опредѣленіи логариѳмовъ чиселъ высшихъ степеней, получимъ выводы, въ которыхъ послѣдніе десятичные знаки не будутъ сходствовать съ показанными въ примѣрахъ.

45) $\log \left(\frac{357}{1432}\right)^{12} = 0{,}7607024 - 8.$

46) $\log \left(\frac{1}{14}\right)^{125} = 0{,}7339955 - 144.$

47) $\log \left[(14{,}418)^{9} \times (3{,}71)^{6}\right] = 13{,}8463886.$

48) $\log \left[(0{,}0534)^{3} \times \left(\frac{32768}{3875}\right)^{10}\right] = 5{,}4544061.$

49) $\log \frac{(0{,}5936)^{20} \times 386}{(0{,}076)^{23}} = 23{,}7977525.$

50) $\log \sqrt{(5)} = 0{,}3494850.$

51) $\log \sqrt{(73567)} = 2{,}4333415.$

52) $\log \sqrt[3]{(135)} = 0{,}7101112.$

53) $\log \sqrt[8]{(15276)} = 0{,}5230012.$

54) $\log \sqrt[5]{(35107)} = 0{,}9090787.$

55) $\log \sqrt[100]{(13)} = 0{,}0111394.$

56) $\log \sqrt[7]{\left(\frac{15}{4}\right)} = 0{,}0820045.$

57) $\log \sqrt[5]{\left(\frac{4}{9}\right)} = 0{,}9295635 - 1.$

58) $\log \sqrt[16]{\left(\frac{3587}{20953}\right)} = 0{,}9525632 - 1.$

59) $\log \sqrt[35]{\left(\frac{803}{91056}\right)} = 0{,}9412973 - 1.$

60) $\log \sqrt[17]{(954)^{12}} = 2{,}1032106.$

61) $\log \sqrt[11]{\left(\frac{12}{7}\right)^{28}} = 0{,}5958482.$

62) $\log \sqrt[13]{\left(\frac{547}{935}\right)^{207}} = 0{,}2927210 - 4.$

63) $\log \sqrt[14]{\left(\frac{1}{3}\right)^{187}} = 0{,}6270232 - 7.$

64) $\log \sqrt[16]{\left(\frac{14}{267}\right)^{715}} = 0{,}7828746 - 58.$

65) $\log \sqrt[80]{(0{,}00534)} = 0{,}9715943 - 1.$

66) $\log \sqrt[540]{(0{,}00007)} = 0{,}9923057 - 1.$

67) $\log \sqrt[12]{(0{,}34576)^{7}} = 0{,}7309519 - 1.$

68) $\log \sqrt[32]{(356,27)^{11}} = 0,8771741.$

69) $\log \sqrt[5]{\left(\frac{0,365 \times \sqrt{(2)}}{788}\right)} = 0,3632563 - 1.$

70) $\log \sqrt[10]{\left(\frac{78563 \sqrt[5]{(\frac{5}{3})}}{15 \sqrt[4]{(0,2)}}\right)} = 0,3967819.$

71) $\log \sqrt[9]{\left(\frac{347 \sqrt[7]{(0,0073)}}{126 \sqrt[5]{(\frac{4}{9})}}\right)} = 0,0280126.$

---

2. Употребленіе пропорціональныхъ частей при вычисленіи посредствомъ логариѳмовъ.

a) Опредѣленіе логариѳмовъ такихъ чиселъ, кои не находятся въ таблицахъ.

1) $\log 1851273 = 6,2674705.$
2) $\log 14459809 = 7,1601626.$
3) $\log 10134761 = 7,0058135.$
4) $\log 7095137 = 6,8509608.$
5) $\log 506860900 = 8,7048888.$
6) $\log 3,614699 = 0,5580721.$
7) $\log 84,827567 = 1,9285370.$
8) $\log 211447,39 = 5,3252023.$
9) $\log 0,0013514133 = 0,1307882 - 3.$
10) $\log 0,0003599547 = 0,5562478 - 4.$
11) $\log 75907\frac{1}{8} = 4,8802825.$
12) $\log 32116\frac{7}{9} = 4,5067320.$
13) $\log 2528811\frac{1}{4} = 6,4029164.$
14) $\log 522076\frac{2}{13} = 5,7177339.$

b) Опредѣленіе чиселъ, которыхъ точные логариѳмы не находятся въ таблицахъ.

1) Num. log 1,0742664 = 11,86496..... (*)
2) Num. log 3,5947835 = 3933,538.....
3) Num. log 0,7813427 = 6,044254.....
4) Num. log 2,0037683 = 100,8714.....
5) Num. log 4,0005673 = 10013,07.....
6) Num. log 5,6165834 = 413602,7.....
7) Num. log 3,7694480 = 5880,956.. ...
8) Num. log 0,2307611 = 1,701222.....
9) Num. log 4,2923065 = 19602,27.....
10) Num. log 6,1785400 = 1508481,.....

---

4. Примѣры вычисленія нѣкоторыхъ численныхъ выраженій, посредствомъ логариѳмовъ.

1) $\sqrt[7]{(8)} = 1,345900.....$

2) $\sqrt[4]{(35246)} = 13,70179.....$

3) $\sqrt[12]{(567348)} = 3,016389.....$

4) $\sqrt[6]{(235,78)} = 2,485522.....$

5) $\sqrt[5]{\left(\frac{13}{16}\right)} = 0,959322.....$

6) $\sqrt[7]{\left(\frac{1171}{345}\right)} = 1,190747.....$

7) $\sqrt[3]{\left(17705\frac{2}{9}\right)} = 26,06356.....$

8) $\sqrt[9]{\left(1350\frac{7}{8}\right)} = 2,227645.....$

(*) Вообще знакоположеніе num. log *a* означаетъ здѣсь то число, котораго логариѳмъ равенъ *a*. *Прим. Переводчика.*

9) $\sqrt[8]{\left(172\frac{5}{6}\right)} = 1{,}904159.....$

10) $\sqrt[13]{\left(\frac{3348}{569}\right)} = 1{,}146055.....$

11) $\left(\frac{9}{8}\right)^{21} = 11{,}86322.....$

12) $\left(2\frac{5}{6}\right)^{9} = 11767{,}35.....$

13) $\left(\frac{643}{637}\right)^{123} = 3{,}168104.....$

14) $\left(317\frac{3}{4}\right)^{0,6} = 31{,}71402.....$

15) $\left(\frac{167}{53}\right)^{0,32} = 1{,}443779.....$

16) $\left(\frac{5}{7}\right)^{0,0537} = 0{,}982093.....$

17) $\frac{(991{,}767)^5 \times 12{,}34}{(20{,}358 \times 10{,}1575)^6} = 151{,}4369.....$

18) $\frac{(52072)^{13} \times \sqrt{(0{,}000734)^9}}{(255608)^8} = 8930{,}834.....$

19) $\left(\frac{42666}{1147}\right)^{12} \times \left(\frac{765}{19432}\right)^{10} = 62756{,}88.....$

20) $\sqrt[5]{\left[\frac{7}{3}\sqrt[4]{(6)}\right]} = 1{,}295695.....$

21) $\sqrt[3]{\left[0{,}26 . \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)}\right]} = 0{,}596544.....$

22) $\sqrt[5]{\left(\frac{3425\sqrt[7]{(136)}}{0{,}00034}\right)} = 28{,}94639.....$

23) $253\sqrt[3]{\left(\frac{716{,}5}{\sqrt{(2)}}\right)} = 2016{,}914.....$

24) $\sqrt[4]{\left(\frac{132 \times (7{,}356)^9}{\sqrt{(3{,}25)^5}}\right)} = 144{,}5972.....$

25) $\frac{\sqrt[7]{(466871)^6} \times \sqrt[9]{(3576)^{16}}}{996003\sqrt{(0{,}0071)}} = 1788845,.....$

26) $\sqrt[8]{[21 + \sqrt[6]{(19)}]} = 1{,}476875.....$

27) $\sqrt[3]{[5{,}03 + \sqrt[5]{(0{,}2)}]} = 1{,}792020.....$

28) $\sqrt[3]{[9{,}921 - 3\sqrt{(5{,}02)}]} = 1{,}261866.....$

29) $\sqrt[16]{\left(\frac{43 + (5\sqrt[3]{(278)}}{\sqrt[5]{(17)}}\right)} = 1{,}264848.....$

. . . . . .

Упомянемъ еще о слѣдующихъ предложеніяхъ, которыя легко могутъ быть доказаны:

1) Изобразимъ чрезъ A и B двѣ логариѳмическія системы, и чрезъ a и b ихъ основанія; также означимъ чрезъ x и y логариѳмы одного и того же числа k по симъ двумъ системамъ, то всегда будемъ имѣть: $y : x = \log a : \log b$, гдѣ два послѣдніе логариѳма взяты по какой ни есть произвольной третьей системѣ C.

2) Слѣдовательно логариѳмъ числа k по системѣ B найдется, раздѣливъ логариѳмъ сего числа k по системѣ A на логариѳмъ b по той же системѣ A.

3) Посему отношеніе логариѳмовъ однихъ и тѣхъ же чиселъ, по двумъ различнымъ системамъ, всегда постоянно.

4) Итакъ, зная логариѳмъ одного и того же числа по двумъ различнымъ системамъ, не трудно будетъ найти число такое, что если помножимъ на оное всѣ логариѳмы одной системы, то получимъ всѣ логариѳмы по другой изъ двухъ разсматриваемыхъ системъ. Это число называется *модулемъ*. (Преимущественно называютъ модулемъ только то число, на которое должно умножать логариѳмы гиперболической или натуральной системы, которой основаніе $= 2{,}718281828459.....$, чтобы получить логариѳмы по другой системѣ.)

ПЕРЕСТАНОВЛЕНІЯ (PERMUTATIONEN), СОЕДИНЕНІЯ (COMBINATIONEN) и СОПРЯЖЕНІЯ (VARIATIONEN).

Что называется перестановленіемъ, соединеніемъ и сопряженіемъ? Въ чемъ эти три рода дѣйствій между собою разнятся въ отношеніи къ различному расположенію предметовъ? — Какими правилами должно руководствоваться при перестановленіяхъ, соединеніяхъ и сопряженіяхъ, и на чемъ сіи правила основаны?

Принимая науку о соединеніяхъ за отдѣльную науку, она не ограничивается вышеупомянутыми тремя родами соединеній, и не разсматриваетъ однѣ только величины, но объемлетъ все, что можетъ быть расположено по извѣстнымъ законамъ. Въ этомъ обширномъ смыслѣ она сюда не относится.

Подробныя сочиненія по этой части суть: Stahl's Grundriss der Combinationslehre, nebst Anwendung derselben auf die Analysis, Leipzig 1800; и Weingärtner's Lehrbuch der combinatorischen Analysis, nach der Theorie des Herrn Prof. Hindenburg, Leipzig 1801.

---

1. Перестановленія.

a) Таблицы перестановленія данныхъ буквъ.

1) Perm. (*abc*) =	2) Perm. (*aabb*) =
abc	*aabb*
acb	*abab*
bac	*abba*
bca	*baab*
cab	*baba*
cba	*bbaa*

3) Perm. (*abcd*) =

abcd	*cabd*
abdc	*cadb*
acbd	*cbad*
acdb	*cbda*
adbc	*cdab*
adcb	*cdba*
bacd	*dabc*
badc	*dacb*
bcad	*dbac*
bcda	*dbca*
bdac	*dcab*
bdca	*dcba*

4) Perm. (*aabc*) =

abbc
abcb
acbb
babc
bacb
bbac
bbca
bcab
bcba
cabb
cbab
cbba

5) Perm. (*aabbc*) =

aabbc	*babca*
aabcb	*bacab*
aacbb	*bacba*
ababc	*bbaac*
abacb	*bbaca*
abbac	*bbcaa*
abbca	*bcaab*
abcab	*bcaba*
abcba	*bcbaa*
acabb	*caabb*
acbab	*cabab*
acbba	*cabba*
baabc	*cbaab*
baacb	*cbaba*
babac	*cbbaa*

6) Perm. (*aaaabb*) =

aaaabb
aaabab
aaabba
aabaab
aababa
aabbaa
abaaab
abaaba
ababaa
abbaaa
baaaab
baaaba
baabaa
babaaa
bbaaaa

7) Perm. (*aabcd*) =

aabcd	*acabd*	*baacd*	*caabd*	*daabc*
aabdc	*acadb*	*baadc*	*caadb*	*daacb*
aacbd	*acbad*	*bacad*	*cabad*	*dabac*
aacdb	*acbda*	*bacda*	*cabda*	*dabca*
aadbc	*acdab*	*badac*	*cadab*	*dacab*
aadcb	*acdba*	*badca*	*cadba*	*dacba*
abacd	*adabc*	*bcaad*	*cbaad*	*dbaac*
abadc	*adacb*	*dcada*	*cbada*	*dbaca*
abcad	*adbac*	*bcdaa*	*cbdaa*	*dbcaa*
abcda	*adbca*	*bdaac*	*cdaab*	*dcaab*
abdac	*adcab*	*bdaca*	*cdaba*	*dcaba*
abdca	*adcba*	*bdcaa*	*cdbaa*	*dcbaa*

8) Perm. (*aabbcc*) =

aabbcc	*acabbc*	*bacabc*	*bcbaac*	*cbaabc*
aabcbc	*acabcb*	*bacacb*	*bcbaca*	*cbaacb*
aabccb	*acacbb*	*bacbac*	*bcbcaa*	*cbabac*
aacbbc	*acbabc*	*bacbca*	*bccaab*	*cbabca*
aacbcb	*acbacb*	*baccab*	*bccaba*	*cbacab*
aaccbb	*acbbac*	*baccba*	*bccbaa*	*cbacba*
ababcc	*acbbca*	*bbaacc*	*caabbc*	*cbbaac*
abacbc	*acbcab*	*bbacac*	*caabcb*	*cbbaca*
abaccb	*acbcba*	*bbacca*	*caacbb*	*cbbcaa*
abbacc	*accabb*	*bbcaac*	*cababc*	*cbcaab*
abbcac	*accbab*	*bbcaca*	*cabacb*	*cbcaba*
abbcca	*accbba*	*bbccaa*	*cabbac*	*cbcbaa*
abcabc	*baabcc*	*bcaabc*	*cabbca*	*ccaabb*
abcacb	*baacbc*	*bcaacb*	*cabcab*	*ccabab*
abcbac	*baaccb*	*bcabac*	*cabcba*	*ccabba*
abcbca	*babacc*	*bcabca*	*cacabb*	*ccbaab*
abccab	*babcac*	*bcacab*	*cacbab*	*ccbaba*
abccba	*babcca*	*bcacba*	*cacbba*	*ccbbaa*

b) Число перестановленій (*).

Формулы.

I. Число перестановленій N различныхъ буквъ $= 1.2.3.4.5\ldots\ldots (N-1)\,N$.

II. Если же между данными буквами нѣкоторыя будутъ равны между собою, то при $l+m+n+p+$ etc. $= N$, число перестановленій выраженія: $a^l\ b^m\ c^n\ d^p\ldots$

$$= \frac{1.2.3.4\ldots\ldots (N-1)\,N}{1.2.3\ldots\ldots l \times 1.2.3\ldots m \times 1.2.3\ldots n \times 1.2.3\ldots\ldots p \times \ldots}$$

$$= \frac{(l+1)\,(l+2)\,(l+3)\ldots\ldots (N-1)\,N}{1.2.3\ldots\ldots m \times 1.2.3\ldots\ldots n \times 1.2.3\ldots\ldots p \times \ldots}$$

$$= \frac{(m+1)\,(m+2)\,(m+3)\ldots\ldots (N-1)\,N}{1.2.3\ldots\ldots l \times 1.2.3\ldots\ldots n \times 1.2.3\ldots\ldots p \times \ldots}$$

$$= \frac{(n+1)\,(n+2)\,(n+3)\ldots\ldots (N-1)\,N}{1.2.3\ldots\ldots l \times 1.2.3\ldots m \times 1.2.3\ldots\ldots p \times \ldots} \text{ и т. д.}$$

гдѣ произведеній $1.2.3\ldots l$, $1.2.3\ldots m$, $1.2.3\ldots n$, $1.2.3\ldots p$, etc., будетъ столько, сколько данное выраженіе содержитъ различныхъ буквъ.

Примѣры.

1) n. P. $(a) = 1$.
2) n. P. $(ab) = 2$.
3) n. P. $(abc) = 6$.
4) n. P. $(abcd) = 24$.
5) n. P. $(abcde) = 120$.
6) n. P. $(abcdef) = 720$.
7) n. P. $(a^2bc) = 12$.
8) n. P. $(a^2b^2) = 6$.
9) n. P. $(a^3b^5c^2) = 2520$.
10) n. P. $(a^2b^4cd) = 840$.
11) n. P. $(a^2b^2c^2) = 90$.
12) n. P. $(a^3b^7c^4d) = 1801800$.

(*) Встрѣчающіеся здѣсь показатели означаютъ сколько разъ буква, при которой они находятся, должна быть повторена. — *N. P.* значитъ numerus Permutationum (число перестановленій).

13) n. P. $(a^2b^4c^8d^4) = 30630600.$

14) n. P. $(a^2b^{10}cd^2e^3) = 73513440.$

15) n. P. $(a^5b^5c^4d^2) = 30270240.$

16) n. P. $(a^{13}b^2c^5d^3e^2) = 864913896000.$

17) n. P $a^3b^7c^4d^2e^3f^5) = 593676898214400.$

18) n. P. $(a^m) = 1.$

19) n. P. $(a^{m-1}b) = m.$

20) n. P. $(a^{m-2}b^2) = \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}.$

21) n. P. $(a^{m-3}b^3) = \frac{m(m-1)(m-2}{1 \cdot 2 \cdot 3}.$

22) n. P. $(a^{m-4}b^4) = \frac{m(m-1(m-2)(m-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}.$

23) n. P. $(a^{m-5}b^5) = \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}.$

и т. д.

---

2. Соединенія.

a) Соединенія съ повтореніями.

1) Comb. (a, b, c, d) втораго порядка.

aa, ab, ac, ad, bb, bc, bd, cc, cd, dd.

2) Comb. (a, b, c, d, e) втораго порядка.

aa, ab, ac, ad, ae, bb, bc, bd, be, cc, cd, ce, dd, de, ee,

3) Comb. (a, b, c) (Третьяго порядка.)

aaa
aab
aac
abb
abc
acc
bbb
bbc
bcc
ccc

4) Comb. (a, b, c, d) (Третьяго порядка.)

aaa	*bbb*
aab	*bbc*
aac	*bbd*
aad	*bcc*
abb	*bcd*
abc	*bdd*
abd	*ccc*
acc	*ccd*
acd	*cdd*
add	*ddd*

5) Comb. (*a*, *b*, *d*, *e*)

(Третьяго порядка.)

aaa	*add*	*bee*
aab	*ade*	*ccc*
aac	*aee*	*ccd*
aad	*bbb*	*cce*
aae	*bbc*	*cdd*
abb	*bbd*	*cde*
abc	*bbe*	*cee*
abd	*bcc*	*ddd*
abe	*bcd*	*dde*
acc	*bce*	*dee*
acd	*bdd*	*eee*
ace	*bde*	

6) Comb. (*a*, *b*, *c*)

(Четвертаго порядка.)

aaaa
aaab
aaac
aabb
aabc
aacc
abbb
abbc
abcc
accc
bbbb
bbbc
bbcc
bccc
cccc

7) Comb. (*a*, *b*, *c*, *d*)

(Четвертаго порядка.)

aaaa	*abbd*	*bbcd*
aaab	*abcc*	*bbdd*
aaac	*abcd*	*bccc*
aaad	*abdd*	*bccd*
aabb	*accc*	*bcdd*
aabc	*accd*	*bddd*
aabd	*acdd*	*cccc*
aacc	*addd*	*cccd*
aacd	*bbbb*	*ccdd*
aadd	*bbbc*	*cddd*
abbb	*bbbd*	*dddd*
abbc	*bbcc*	

8) Comb. (*a*, *b*, *c*, *d*, *e*)

(Четвертаго порядка.)

aaaa	*abbe*	*bbbc*	*bdee*
aaab	*abcc*	*bbbd*	*beee*
aaac	*abcd*	*bbbe*	*cccc*
aaad	*abce*	*bbcc*	*cccd*
aaae	*abdd*	*bbcd*	*ccce*
aabb	*abde*	*bbce*	*ccdd*
aabc	*abee*	*bbdd*	*ccde*
aabd	*accc*	*bbde*	*ccee*
aabe	*accd*	*bbee*	*cddd*
aace	*acce*	*bccc*	*cdde*
aacd	*acdd*	*bccd*	*cdee*
aace	*acde*	*bcce*	*ceee*
aadd	*acee*	*bcdd*	*dddd*
aade	*addd*	*bcde*	*ddde*
aaee	*adde*	*bcee*	*ddee*
abbb	*adee*	*bddd*	*deee*
abbc	*aeee*	*bdde*	*eeee*
abbd	*bbbb*		

9) Comb. (*a*, *b*, *c*)

(Пятаго порядка.)

aaaaa	*abbbc*
aaaab	*abbcc*
aaaac	*abccc*
aaabb	*acccc*
aaabc	*bbbbb*
aaacc	*bbbbc*
aabbb	*bbbcc*
aabbc	*bbccc*
aabcc	*bcccc*
aaccc	*ccccc*
abbbb	

10) Comb. (a, b, c, d)

(Пятаго порядка).

aaaaa	*aabcd*	*abcdd*	*bbccd*
aaaab	*aabdd*	*abddd*	*bbcdd*
aaaac	*aaccc*	*acccc*	*bbddd*
aaaad	*aaccd*	*acccd*	*bcccc*
aaabb	*aacdd*	*accdd*	*bcccd*
aaabc	*aaddd*	*acddd*	*bccdd*
aaabd	*abbbb*	*adddd*	*bcddd*
aaacc	*abbbc*	*bbbbb*	*bdddd*
aaacd	*abbbd*	*bbbbc*	*ccccc*
aaadd	*abbcc*	*bbbbd*	*ccccd*
aabbb	*abbcd*	*bbbcc*	*cccdd*
aabbc	*abbdd*	*bbbcd*	*ccddd*
aabbd	*abccc*	*bbbdd*	*cdddd*
aabcc	*abccd*	*bbccc*	*ddddd*

Число соединеній n буквъ, съ повтореніями будетъ:

для 1-го порядка $= n$.

— 2-го — $= \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2}$.

— 3-го — $= \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$.

— 4-го — $= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$.

. . . . . .

— m-го — $= \frac{n(n+1)(n+2)\ldots(n+m-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots m}$.

d) Соединенія безъ повторенiй.

1) Comb. (*a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, *h*, *i*)

(Втораго порядка.)

ab	*ah*	*bg*	*cg*	*dh*	*fg*
ac	*ai*	*bh*	*ch*	*di*	*fh*
ad	*bc*	*bi*	*ci*	*ef*	*fi*
ae	*bd*	*cd*	*de*	*eg*	*gh*
af	*be*	*ce*	*df*	*ch*	*gi*
ag	*bf*	*cf*	*dg*	*ei*	*hi*

2) Comb. (*a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*)

(Третьяго порядка.)

abc	*acd*	*adf*	*bcf*	*cde*
abd	*ace*	*aef*	*bde*	*cdf*
abe	*acf*	*bcd*	*bdf*	*cef*
abf	*ade*	*bce*	*bef*	*def*

3) Comb. (*a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, *h*)

(Третьяго порядка.)

abc	*adf*	*bcf*	*bfh*	*cgh*
abd	*adg*	*bcg*	*bgh*	*def*
abe	*adh*	*bch*	*cde*	*deg*
abf	*aef*	*bde*	*cdf*	*deh*
abg	*aeg*	*bdf*	*cdg*	*dfg*
abh	*aeh*	*bdg*	*cdh*	*dfh*
acd	*afg*	*bdh*	*cef*	*dgh*
ace	*afh*	*bef*	*ceg*	*efg*
acf	*agh*	*beg*	*ceh*	*efh*
acg	*bcd*	*beh*	*cfg*	*egh*
ach	*bce*	*bfg*	*cfh*	*fgh*
ade				

4) Comb. (a, b, c, d, e, f, g).

(Четвертаго порядка.)

abcd	*abfg*	*adfg*	*bdeg*
abce	*acde*	*aefg*	*bdfg*
abcf	*acdf*	*bcde*	*befg*
abcg	*acdg*	*bcdf*	*cdef*
abde	*acef*	*bcdg*	*cdeg*
abdf	*aceg*	*bcef*	*cdfg*
abdg	*acfg*	*bceg*	*cefg*
abef	*adef*	*bcfg*	*defg*
abeg	*adeg*	*bdef*	

5) Comb. (a, b, c, d, e, f, g, h)

(Пятаго порядка.)

abcde	*abdfh*	*acegh*	*bcefh*
abcdf	*abdgh*	*acfgh*	*bcegh*
abcdg	*abefg*	*adefg*	*bcfgh*
abcdh	*abefh*	*adefh*	*bdefg*
abcef	*abegh*	*adegh*	*bdefh*
abceg	*abfgh*	*adfgh*	*bdegh*
abceh	*acdef*	*aefgh*	*bdfgh*
abcfg	*acdeg*	*bcdef*	*befgh*
abcfh	*acdeh*	*bcdeg*	*cdefg*
abcgh	*acdfg*	*bcdeh*	*cdefh*
abdef	*acdfh*	*bcdfg*	*cdegh*
abdeg	*acdgh*	*bcdfh*	*cdfgh*
abdeh	*acefg*	*bcdgh*	*cefgh*
abdfg	*acefh*	*bcefg*	*defgh*

Число соединеній n буквъ, безъ повтореній будетъ:
для 1-го порядка $= n$.
— 2-го — $= \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}$.

для 3-го порядка $= \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$.

— 4-го — $= \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$.

. . . . . .

— m-го — $= \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots\cdots m}$.

---

3. Сопряженія.

a) Сопряженія съ повтореніями.

1) Var. (*a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*)

(Втораго порядка.)

aa	*ba*	*ca*	*da*	*ea*	*fa*
ab	*bb*	*cb*	*db*	*eb*	*fb*
ac	*bc*	*cc*	*dc*	*ec*	*fc*
ad	*bd*	*cd*	*dd*	*ed*	*fd*
ae	*be*	*ce*	*de*	*ee*	*fe*
af	*bf*	*cf*	*df*	*ef*	*ff*

2) Var. (*a*, *b*, *c*, *d*)

(Третьяго порядка.)

aaa	*adb*	*bcc*	*cbd*	*dba*
aab	*adc*	*bcd*	*cca*	*dbb*
aac	*add*	*bda*	*ccb*	*dbc*
aad	*baa*	*bdb*	*ccc*	*dbd*
aba	*bab*	*bdc*	*ccd*	*dca*
abb	*bac*	*bdd*	*cda*	*dcb*
abc	*bad*	*caa*	*cdb*	*dcc*
abd	*bba*	*cab*	*cdc*	*dcd*
aca	*bbb*	*cac*	*cdd*	*dda*
acb	*bbc*	*cad*	*daa*	*ddb*
acc	*bbd*	*cba*	*dab*	*ddc*
acd	*bca*	*cbb*	*dac*	*ddd*
ada	*bcb*	*cbc*	*dad*	

3) Var. (*a*, *b*, *c*)

(Четвертаго порядка.)

aaaa	*abcc*	*baca*	*bcbb*	*cbac*
aaab	*acaa*	*bacb*	*bcbc*	*cbba*
aaac	*acab*	*bacc*	*bcca*	*cbbb*
aaba	*acac*	*bbaa*	*bccb*	*cbbc*
aabb	*acba*	*bbab*	*bccc*	*cbca*
aabc	*acbb*	*bbac*	*caaa*	*cbcb*
aaca	*acbc*	*bbba*	*caab*	*cbcc*
aacb	*acca*	*bbbb*	*caac*	*ccaa*
aacc	*accb*	*bbbc*	*caba*	*ccab*
abaa	*accc*	*bbca*	*cabb*	*ccac*
abab	*baaa*	*bbcb*	*cabc*	*ccba*
abac	*baab*	*bbcc*	*caca*	*ccbb*
abba	*baac*	*bcaa*	*cacb*	*ccbc*
abbb	*baba*	*bcab*	*cacc*	*ccca*
abbc	*babb*	*bcac*	*cbaa*	*cccb*
abca	*babc*	*bcba*	*cbab*	*cccc*
abcb				

Число сопряженій n буквъ съ повтореніями для m-го порядка $= n^m$.

b) Сопряженія безъ повтореній.

4) Var. (*a*, *b*, *c*, *d*, *e*)

(Четвертаго порядка.)

abcd	*aecb*	*bdea*	*cdab*	*dbca*	*eadb*
abce	*aecd*	*bdec*	*cdae*	*dbce*	*eadc*
abdc	*aedb*	*beac*	*cdba*	*dbea*	*ebac*
abde	*aedc*	*bead*	*cdbe*	*dbec*	*ebad*
abec	*bacd*	*beca*	*cdea*	*dcab*	*ebca*

abed	*bace*	*becd*	*cdeb*	*dcae*	*ebcd*
acbd	*badc*	*beda*	*ceab*	*dcba*	*ebda*
acbe	*bade*	*bedc*	*cead*	*dcbe*	*ebdc*
acdb	*baec*	*cabd*	*ceba*	*dcea*	*ecab*
acde	*baed*	*cabe*	*cebd*	*dceb*	*ecad*
aceb	*bcad*	*cadb*	*ceda*	*deab*	*ecba*
aced	*bcae*	*cade*	*cedb*	*deac*	*ecbd*
adbc	*bcda*	*caeb*	*dabc*	*deba*	*ecda*
adbe	*bcde*	*caed*	*dabe*	*debc*	*ecdb*
adcb	*bcea*	*cbad*	*dacb*	*deca*	*edab*
adce	*bced*	*cbae*	*dace*	*decb*	*edac*
adeb	*bdac*	*cbda*	*daeb*	*eabc*	*edba*
adec	*bdae*	*cbde*	*daec*	*eabd*	*edbc*
aebc	*bdca*	*cbea*	*dbac*	*eacb*	*edca*
aebd	*bdce*	*cbed*	*dbae*	*eacd*	*edcb*

Число сопряженій n буквъ безъ повтореній будетъ:

для 1-го порядка $= n$.

— 2-го — $= n\,(n - 1)$.

— 3-го — $= n\,(n - 1)\,(n - 2)$.

— 4-го — $= n\,(n - 1)\,(n - 2)\,(n - 3)$

. . . . . .

— m-го — $= n\,(n - 1)\,(n - 2)\,\ldots\ldots\ldots\,(n - m + 1)$.

О ДВУЧЛЕННЫХЪ И МНОГОЧЛЕННЫХЪ КОЛИЧЕСТВАХЪ СЪ ЦѢЛЫМИ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМИ ПОКАЗАТЕЛЯМИ.

1. Нютоновъ биномъ.

Формулы.

I. $$(a \pm b)^n = a^n \pm \frac{n}{1} a^{n-1} b^1 + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-2} b^2$$
$$\pm \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{n-3} b^3 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} a^{n-4} b^4$$
$$\pm \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} a^{n-5} b^5 + \ldots\ldots$$
$$\pm \frac{n(n-1)(n-2) \cdots\cdots\cdots 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots\cdots\cdots n} b^n.$$

Знаки $\pm$, здѣсь встрѣчающіеся, принадлежатъ: $+$ къ $(a+b)^n$, а $-$ къ $(a-b)^n$. Послѣдній членъ всегда $= b^n$ и при четномъ n будетъ имѣть знакъ $+$, а при нечетномъ знакъ $-$.

II. Число членовъ, входящихъ въ рядъ, $= n+1$. Законъ показателей надъ a и b очевиденъ. Коэфиціенты возрастаютъ только до средины, отъ которой они начинаютъ уменьшаться въ томъ же порядкѣ, такъ-что коэфиціенты членовъ, находящихся въ равномъ разстояніи отъ перваго и послѣдняго члена, равны между собою. При четномъ n будетъ одинъ членъ средній и для $(a+b)^n$ онъ

$$= + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots\left(\frac{n}{2}+1\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots\cdots\cdots \frac{n}{2}} a^{\frac{n}{2}} b^{\frac{n}{2}}$$

а при $(a-b)^n$ сей членъ будетъ имѣть знакъ $-$, ежели n будетъ вида: $4m+2$, въ противномъ же случаѣ онъ удержитъ знакъ $+$. Для нечетнаго же n будутъ два средніе члена, которые для $(a+b)^n$ суть:

$$+\frac{n\,(n-1)\cdot\cdots\cdots\frac{n+3}{2}}{1\cdot 2\cdot\cdots\cdots\cdots\frac{n-1}{2}}\,a^{\frac{n+1}{2}}\,b^{\frac{n-1}{2}}$$

$$+\frac{n\,(n-1)\cdot\cdots\cdots\frac{n+3}{2}}{1\cdot 2\cdot\cdots\cdots\cdots\frac{n-1}{2}}\,a^{\frac{n-1}{2}}\,b^{\frac{n+1}{2}}$$

$$=\frac{n\,(n-1)\cdot\cdots\cdots\frac{n+3}{2}}{1\cdot 2\cdot\cdots\cdots\cdots\frac{n-1}{2}}\left(a^{\frac{n+1}{2}}b^{\frac{n-1}{2}}+a^{\frac{n-1}{2}}b^{\frac{n+1}{2}}\right)$$

а для $(a-b)^n$ первой членъ имѣетъ знакъ $+$, а второй $-$, ежели n будетъ вида: $4m+1$, и на оборотъ, ежели n вида: $4m+3$.

III. Неопредѣленный $(m+1)$ членъ ряда будетъ

$$=\pm\frac{n\,(n-1)\,(n-2)\cdot\cdots\cdots(n-m+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdots\cdots m}\,a^{n-m}b^{m}.$$

Изъ знаковъ $\pm$, находящихся передъ симъ выраженіемъ, верхній принадлежитъ всѣмъ членамъ разложенія $(a+b)^n$ и нечетнымъ членамъ разложенія $(a-b)^n$; нижній же принадлежитъ только четнымъ членамъ разложенія $(a-b)^n$.

IV. Сумма всѣхъ коэфиціентовъ ряда $(a+b)^n$, т. е. $1+\frac{n}{1}+\frac{n\,(n-1)}{1\cdot 2}+\text{etc.}=(1+1)^n=2^n$; сумма же коэфиціентовъ ряда $(a-b)^n$, сохраняя знаки, передъ ними стоящіе, т. е. $1-\frac{n}{1}+\frac{n\,(n-1)}{1\cdot 2}-\text{etc.}=(1-1)^n=0$.

V. Если положимъ, что $\frac{b}{a}=Q$ и первый членъ ряда изобразимъ чрезъ A, второй чрезъ B, третій чрезъ C и

т. д., то получимъ: $(a \pm b)^n = A \pm \frac{n}{1} AQ + \frac{n-1}{2} BQ \pm \frac{n-2}{3} CQ + \frac{n-3}{4} DQ \pm \frac{n-4}{5} EQ \ldots\ldots$

Формула сія чрезвычайно удобна для вычисленія послѣдующихъ членовъ по даннымъ предъидущимъ.

Примѣры.

1) $(a \pm b)^1 = a \pm b.$

2) $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2.$

3) $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3.$

4) $(a \pm b)^4 = a^4 \pm 4a^3b + 6a^2b^2 \pm 4ab^3 + b^4.$

5) $(a \pm b)^5 = a^5 \pm 5a^4b + 10a^3b^2 \pm 10a^2b^3 + 5ab^4 \pm b^5.$

6) $(a \pm b)^6 = a^6 \pm 6a^5b + 15a^4b^2 \pm 20a^3b^3 + 15a^2b^4 \pm 6ab^5 + b^6.$

7) $(a \pm b) = a^7 \pm 7a^6b + 21a^5b^2 \pm 35a^4b^3 + 35a^3b^4 \pm 21a^2b^5 + 7ab^6 \pm b^7.$

8) $(a \pm b)^8 = a^8 \pm 8a^7b + 28a^6b^2 \pm 56a^5b^3 + 70a^4b^4 \pm 56a^3b^5 \pm 28a^2b^6 \pm 8ab^7 + b^8.$

9) $(a \pm b)^9 = a^9 \pm 9a^8b + 36a^7b^2 \pm 84a^6b^3 + 126a^5b^4 \pm 126a^4b^5 + 84a^3b^6 \pm 36a^2b^7 + 9ab^8 \pm b^9.$

10) $(a \pm b)^{10} = a^{10} \pm 10a^9b + 45a^8b^2 \pm 120a^7b^3 + 210a^6b^4 \pm 252a^5b^5 + 210a^4b^6 \pm 120a^3b^7 + 45a^2b^8 \pm 10ab^9 + b^{10}.$

11) $(1 \pm x)^{11} = 1 \pm 11x + 55x^2 \pm 165x^3 + 330x^4 \pm 462x^5 + 462x^6 \pm 330x^7 + 165x^8 \pm 55x^9 + 11x^{10} \pm x^{11}.$

12) $(1 \pm x)^{12} = 1 \pm 12x + 66x^2 \pm 220x^3 + 495x^4 \pm 792x^5 + 924x^6 \pm 792x^7 + 495x^8 \pm 220x^9 + 66x^{10} \pm 12x^{11} + x^{12}.$

13) $(5 - 4x)^4 = 625 - 2000x + 2400x^2 - 1280x^3 + 256x^4.$

14) $(3 - 2x^2)^6 = 729 - 2916x^2 + 4860x^4 - 4320x^6 + 2160x^8 - 576x^{10} + 64x^{12}$.

15) $(\frac{1}{2}x + 2y)^7 = \frac{1}{128}x^7 + \frac{7}{32}x^6y + \frac{21}{8}x^5y^2 + \frac{35}{2}x^4y^3 + 70x^3y^4 + 168x^2y^5 + 224xy^6 + 128y^7$.

16) $(a^3 + 3ab)^9 = a^{27} + 27a^{25}b + 324a^{23}b^2 + 2268a^{21}b^3 + 10206a^{19}b^4 + 30618a^{17}b^5 + 61236a^{15}b^6 + 78732a^{13}b^7 + 59049a^{11}b^8 + 19683a^9b^9$.

17) $(3ac - 2bd)^5 = 243a^5c^5 - 810a^4c^4bd + 1080a^3c^3b^2d^2 - 720a^2c^2b^3d^3 + 240acb^4d^4 - 32b^5d^5$.

18) $(5a^2c^2d - 4abd^2)^4 = 625a^8c^8d^4 - 2000a^7bc^6d^5 + 2400a^6b^2c^4d^6 - 1280a^5b^3c^2d^7 + 256a^4b^4d^8$.

19) $\left(\frac{2ac}{b^2} + \frac{1}{4}bc^2d\right)^6 = 64a^6c^6b^{-12} + 48a^5c^7db^{-9} + 15a^4c^8d^2b^{-6} + \frac{5}{2}a^3c^9d^3b^{-3} + \frac{15}{64}a^2c^{10}d^4 + \frac{3}{256}ab^3c^{11}d^5 + \frac{1}{4096}b^6c^{12}d^6$.

20) $[\sqrt{(a)} \pm \sqrt{(b)}]^4 = a^2 + 6ab + b^2 \pm (4a + 4b)\sqrt{(ab)}$.

21) $[\sqrt{(a)} \pm \sqrt{(b)}]^7 = (a^3 + 21a^2b + 35ab^2 + 7b^3)\sqrt{(a)} \pm (7a^3 + 35a^2b + 21ab^2 + b^3)\sqrt{(b)}$.

22) $(a + b)^n + (a - b)^n = 2\left(a^n + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}a^{n-4}b^4 + \frac{n \cdots n-5}{1 \cdots 6}a^{n-6}b^6 + \ldots\ldots\right)$ (*).

23) $(a + b)^n - (a - b)^n = 2\left(\frac{n}{1}a^{n-1}b + \frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}a^{n-3}b^3 + \frac{n \ldots n-4}{1 \ldots 5}a^{n-5}b^5 + \frac{n \ldots n-6}{1 \ldots 7}a^{n-7}b^7 + \ldots\right)$.

(*) Ряды 22, 23, 24, 25, 26 должно продолжать до тѣхъ поръ, пока не получимъ коэфиціента равнаго нулю.

24) $[a \pm b\sqrt{(-1)}]^n = a^n - \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-2}b^2 + \frac{n \ldots n-3}{1 \ldots\ldots 4} a^{n-4}b^4 - \text{etc.} \pm \left(\frac{n}{1} a^{n-1} b - \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{n-3}b^3 + \frac{n \cdots n-4}{1 \cdots\cdots 5} a^{n-5} b^5 - \text{etc.}\right)\sqrt{(-1)}$.

25) $[a + b\sqrt{(-1)}]^n + [a - b\sqrt{(-1)}]^n = 2\left(a^n - \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-2}b^2 + \frac{n \cdots n-3}{1 \cdots\cdots 4} a^{n-4}b^4 - \text{etc.}\right)$ (*).

26) $\frac{[a + b\sqrt{(-1)}]^n - [a - b\sqrt{(-1)}]^n}{\sqrt{(-1)}} = 2\left(na^{n-1}b - \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{n-3}b^3 + \frac{n \cdots n-4}{1 \cdots\cdots 5} a^{n-5}b^5 - \text{etc.}\right)$.

Опредѣленіе отдѣльныхъ членовъ.

27) 3-й чл. разложен. $(a + b)^{15}$ буд. $= 105a^{13}b^2$.
28) 5-й » » $(a + b)^{16}$ » $= 1820a^{12}b^4$.
29) 6-й » » $(a - b)^{30}$ » $= -142506a^{25}b^5$.
30) 4-й » » $(a - b)^{100}$ » $= -161700a^{97}b^5$.
31) 5-й » » $(a^2 - b^2)^{12}$ » $= 495a^{16}b^8$.
32) 9-й » » $(2ab - cd)^{14}$ » $= 192192a^6b^6c^8d^8$.
33) сред. » » $(a - b)^{16}$ » $= 12870a^8b^8$.
34) сред. » » $(a - b)^{18}$ » $= -48620a^9b^9$.
35) Два средніе члена разложенія $(a - b)^{17}$ будутъ $= 24310a^9b^8 - 24310a^8b^9$.
36) Два средніе члена разложенія $(a - b)^{19}$ будутъ $= -92378a^{10}b^9 + 92378a^9b^{10}$.

(*) Слѣдовательно, какъ $(a + b\sqrt{(-1)}]^n + [a - b\sqrt{(-1)}]^n$ такъ и $\frac{[a + b\sqrt{(-1)}]^n - [a - b\sqrt{(-1)}]^n}{\sqrt{(-1)}}$ суть величины возможныя.

2. Возвышеніе въ степени многочисленныхъ количествъ.

Формулы.

I. Пятая степень многочленнаго количества $a + b + c + d + \ldots\ldots + x$ состоитъ изъ суммы всѣхъ возможныхъ соединеній съ повтореніями n-го порядка количествъ a, b, c, d,.....x.

II. Если, посему, многочленное количество $a + b + c + d + \ldots\ldots + x$ состоитъ изъ m членовъ, то степень будетъ содержать $\frac{m\,(m+1)\,(m+2)\cdots(m+n-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots\cdots n}$ членовъ. Сумма показателей a, b, c, d,.....x въ каждомъ членѣ $= n$; сумма же всѣхъ коэфиціентовъ $= m^n$.

III. Если, для краткости, положимъ $b + c + d + \ldots\ldots + x = p$, то: $(a + b + c + d + \ldots\ldots + x)^n = (a + p)^n = a^n + \frac{n}{1} a^{n-1} p + \frac{n\,(n-1)}{1\cdot 2} a^{n-2} p^2 + \ldots\ldots + p^n$. Эта формула можетъ во многихъ случаяхъ быть съ пользою употреблена.

Примѣры.

1) $(a + b + c)^2 = a^2 + 2ab + 2ac + b^2 + 2bc + c^2$.

2) $(a + b + c)^3 = a^3 + 3a^2b + 3a^2c + 3ab^2 + 6abc + 3ac^2 + b^3 + 3b^2c + 3bc^2 + c^3$.

3) $(a + b + c)^4 = a^4 + 4a^3b + 4a^3c + 6a^2b^2 + 12a^2bc + 6a^2c^2 + 4ab^3 + 12ab^2c + 12abc^2 + 4ac^3 + b^4 + 4b^3c + 6b^2c^2 + 4bc^3 + c^4$.

4) $(a+b+c)^5 = a^5 + 5a^4b + 5a^4c + 10a^3b^2 + 20a^3bc$
$+ 10a^3c^2 + 10a^2b^3 + 30a^2b^2c + 30a^2bc^2 + 10a^2c^3$
$+ 5ab^4 + 20ab^3c + 30ab^2c^2 + 20abc^3 + 5ac^4 + b^5$
$+ 5b^4c + 10b^3c^2 + 10b^2c^3 + 5bc^4 + c^5.$

5) $(a+b+c)^6 = a^6 + 6a^5b + 6a^5c + 15a^4b^2 + 30a^4bc$
$+ 15a^4c^2 + 20a^3b^3 + 60a^3b^2c + 60a^3bc^2 + 20a^3c^3$
$+ 15a^2b^4 + 60a^2b^3c + 90a^2b^2c^2 + 60a^2bc^3$
$+ 15a^2c^4 + 6ab^5 + 30ab^4c + 60ab^3c^2 + 60ab^2c^3$
$+ 30abc^4 + 6ac^5 + b^6 + 6b^5c + 15b^4c^2 + 20b^3c^3$
$+ 15b^2c^4 + 6bc^5 + c^6.$

6) $(a+b+c)^7 = a^7 + 7a^6b + 7a^6c + 21a^5b^2 + 42a^5bc$
$+ 21a^5c^2 + 35a^4b^3 + 105a^4b^2c + 105a^4bc^2$
$+ 35a^4c^3 + 35a^3b^4 + 140a^3b^3c + 210a^3b^2c^2$
$+ 140a^3bc^3 + 35a^3c^4 + 21a^2b^5 + 105a^2b^4c$
$+ 210a^2b^3c^2 + 210a^2b^2c^3 + 105a^2bc^4 + 21a^2c^5$
$+ 7ab^6 + 42ab^5c + 105ab^4c^2 + 140ab^3c^3$
$+ 105ab^2c^4 + 42abc^5 + 7ac^6 + b^7 + 7b^6c + 21b^5c^2$
$+ 35b^4c^3 + 35b^3c^4 + 21b^2c^5 + 7bc^6 + c^7.$

7) $(a+b+c+d)^2 = a^2 + 2ab + 2ac + 2ad + b^2 + 2bc$
$+ 2bd + c^2 + 2cd + d^2.$

8) $(a+b+c+d)^3 = a^3 + 3a^2b + 3a^2c + 3a^2d + 3ab^2$
$+ 6abc + 6abd + 3ac^2 + 6acd + 3ad^2 + b^3$
$+ 3b^2c + 3b^2d + 3bc^2 + 6bcd + 3bd^2 + c^3$
$+ 3c^2d + 3cd^2 + d^3.$

9) $(a+b+c+d)^4 = a^4 + 4a^3b + 4a^3c + 4a^3d + 6a^2b^2$
$+ 12a^2bc + 12a^2bd + 6a^2c^2 + 12a^2cd + 6a^2d^2$
$+ 4ab^3 + 12ab^2c + 12ab^2d + 12abc^2 + 24abcd$
$+ 12abd^2 + 4ac^3 + 12ac^2d + 12acd^2 + 4ad^3$
$+ b^4 + 4b^3c + 4b^3d + 6b^2c^2 + 12b^2cd + 6b^2d^2$
$+ 4bc^3 + 12bc^2d + 12bcd^2 + 4bd^3 + c^4 + 4c^3d$
$+ 6c^2d^2 + 4cd^3 + d^4.$

10) $(a+b+c+d)^5 = a^5 + 5a^4b + 5a^4c + 5a^4d + 10a^3b^2$
$+ 20a^3bc + 20a^3bd + 10a^3c^2 + 20a^3cd + 10a^3d^2$
$+ 10a^2b^3 + 30a^2b^2c + 30a^2b^2d + 30a^2bc^2$
$+ 60a^2bcd + 30a^2bd^2 + 10a^2c^3 + 30a^2c^2d$
$+ 30a^2cd^2 + 10a^2d^3 + 5ab^4 + 20ab^3c + 20ab^3d$
$+ 30ab^2c^2 + 60ab^2cd + 30ab^2d^2 + 20abc^3$
$+ 60abc^2d + 60abcd^2 + 20abd^3 + 5ac^4 + 20ac^3d$
$+ 30ac^2d^2 + 20acd^3 + 5ad^4 + b^5 + 5b^4c + 5b^4d$
$+ 10b^3c^2 + 20b^3cd + 10b^3d^2 + 10b^2c^3 + 30b^2c^2d$
$+ 30b^2cd^2 + 10b^2d^3 + 5bc^4 + 20bc^3d + 30bc^2d^2$
$+ 20bcd^3 + 5bd^4 + c^5 + 5c^4d + 10c^3d^2 + 10c^2d^3$
$+ 5cd^4 + d^5.$

11) $(a+2b-c)^3 = a^3 + 6a^2b - 3a^2c + 12ab^2 - 12abc$
$+ 3ac^2 + 8b^3 - 12b^2c + 6bc^2 - c^3.$

12) $\left(3a - 5b - \frac{2c}{3}\right)^4 = 81a^4 - 540a^3b - 72a^3c +$
$1350a^2b^2 + 360a^2bc + 24a^2c^2 - 1500ab^3 - 600ab^2c$
$- 80abc^2 - \frac{32}{9}ac^3 + 625b^4 + \frac{1000}{3}b^3c$
$+ \frac{200}{3}b^2c^2 + \frac{160}{27}bc^3 + \frac{16}{81}c^4.$

13) $(7a^2 - 3ab + 4b^2)^3 = 343a^6 - 441a^5b + 777a^4b^2$
$- 531a^3b^3 + 444a^2b^4 - 144ab^5 + 64b^6.$

14) $\left(\frac{2b^3c}{3a^4} + 7a^2b - \frac{1}{2}\right)^5 = \frac{32}{243}a^{-20}b^{15}c^5 + \frac{560}{81}a^{-14}b^{13}c^4$
$- \frac{40}{81}a^{-16}b^{12}c^4 + \frac{3920}{27}a^{-8}b^{11}c^3 - \frac{560}{27}a^{-10}b^{10}c^3$
$+ \frac{20}{27}a^{-12}b^9c^3 + \frac{13720}{9}a^{-2}b^9c^2 - \frac{980}{3}a^{-4}b^8c^2$
$+ \frac{70}{3}a^{-6}b^7c^2 - \frac{5}{9}a^{-8}b^6c^2 - \frac{24010}{3}a^4b^7c$
$- \frac{6860}{3}a^2b^6c + 245b^5c - \frac{35}{3}a^{-2}b^4c + \frac{5}{24}a^{-4}b^3c$
$+ 16807\,a^{10}b^5 - \frac{12005}{2}a^8b^4 + \frac{1715}{2}a^6b^3$
$- \frac{245}{4}a^4b^2 + \frac{35}{16}a^2b - \frac{1}{32}.$

15) $\left(\frac{2ab}{c^m} - 5a^3c^{3m} - 3ab^2 + \frac{b}{2a}\right)^3 = 8a^3b^3c^{-3m} -$
$60a^5b^2c^m - 36a^3b^4c^{-2m} + 6ab^3c^{-2m} + 150a^7bc^{5m}$
$+ 180a^5b^3c^{2m} - 30a^3b^2c^{2m} + 54a^3b^5c^{-m}$
$- 18ab^4c^{-m} + \frac{3}{2}a^{-1}b^3c^{-m} - 125a^9c^{9m} - 225a^7b^2c^{6m}$
$+ \frac{75}{2}a^5bc^{6m} - 135a^5b^4c^{3m} + 45a^3b^3c^{3m} - \frac{15}{4}ab^2c^{3m}$
$- 27a^3b^6 + \frac{27}{2}ab^5 - \frac{9}{4}a^{-1}b^4 + \frac{1}{8}a^{-3}b^3.$

ПРОГРЕССІИ.

1. Ариѳметическія прогрессіи.

I. Пусть a означаетъ первый членъ, t послѣдній, n число членовъ, d разность и s сумму ариѳметической прогрессіи, то

1) $t = a + (n - 1)\,d.$

2) $s = (a + t)\,\frac{n}{2} = [2a + (n - 1)\,d]\,\frac{n}{2}.$

Посредствомъ этихъ двухъ формулъ можно по данныхъ a, d, и n опредѣлить t и s.

Примѣры.

№	Данныя величины.			Искомыя величины.	
1	$a = 1,$	$d = 1,$	$n = 14$	$t = 14,$	$s = 105$
2	$a = 2,$	$d = 3,$	$n = 17$	$t = 50,$	$s = 442$
3	$a = 7,$	$d = \frac{1}{4},$	$n = 16$	$t = 10\frac{3}{4},$	$s = 142$
4	$a = 2\frac{1}{2},$	$d = \frac{1}{3},$	$n = 100$	$t = 35\frac{1}{2},$	$s = 1900$
5	$a = \frac{3}{4},$	$d = \frac{1}{8},$	$n = 26$	$t = 3\frac{7}{8},$	$s = 60\frac{1}{8}$
6	$a = \frac{5}{7},$	$d = 1\frac{2}{3},$	$n = 13$	$t = 20\frac{5}{7},$	$s = 139\frac{2}{7}$

№	Данныя величины.			Искомыя величины.	
7	$a = -7$,	$d = 3$,	$n = 8$	$t = 14$,	$s = 28$
8	$a = -6$,	$d = \frac{3}{4}$,	$n = 30$	$t = 15\frac{3}{4}$,	$s = 146\frac{1}{4}$
9	$a = \frac{1}{2}$,	$d = -\frac{1}{8}$,	$n = 20$	$t = -1\frac{7}{8}$,	$s = -13\frac{3}{4}$
10	$a = 3\frac{1}{3}$,	$d = -2\frac{5}{6}$,	$n = 15$	$t = -36\frac{1}{3}$,	$s = -247\frac{1}{2}$
11	$a = 0$,	$d = \frac{1}{2}$,	$n = 11$	$t = 5$,	$s = 27\frac{1}{2}$
12	$a = -10$,	$d = -2$,	$n = 6$	$t = -20$,	$s = -90$
13	$a = -\frac{3}{4}$,	$d = \frac{7}{8}$,	$n = 25$	$t = -21\frac{3}{4}$,	$s = -281\frac{1}{4}$

II. Если изъ пяти величинъ a, d, n, t, s, даны три, то всегда можно опредѣлить остальныя, къ чему нижеслѣдующая таблица служить можетъ.

Таблица формулъ ариѳметическихъ прогрессій.

№	Данныя.	Искомыя.	Формулы.
1	a, d, n,	t	$t = a + (n - 1)\, d$
2	a, d, s		$t = -\frac{1}{2} d \pm \sqrt{[2ds + (a - \frac{1}{2} d)^2]}$
3	a, n, s		$t = \frac{2s}{n} - a$
4	d, n, s		$t = \frac{s}{n} + \frac{(n-1)\, d}{2}$
5	a, d, n	s	$s = \frac{1n}{2} [2a + (n - 1)\, d]$
6	a, d, t		$s = \frac{a + t}{2} + \frac{(t + a)\,(t - a)}{2d}$
7	a, n, t		$s = \frac{1}{2}\, n\, (a + t)$
8	d, n, t		$s = \frac{1}{2}\, n\, [2t - (n - t)\, d]$

№	Данныя.	Искомыя.	Формулы.
9	$a,\ n,\ t$	d	$d = \frac{t-a}{n-1}$
10	$a,\ n,\ s$		$d = \frac{2s-2an}{n(n-1)}$
11	$a,\ t,\ s$		$d = \frac{(t+a)(t-a)}{27-t-a}$
12	$n,\ t,\ s$		$d = \frac{2nt-2s}{n(n-1)}$
13	$a,\ d,\ t$	n	$n = 1 + \frac{t-a}{d}$
14	$a,\ d,\ s$		$n = \frac{d-2a}{2d} \pm \sqrt{\left[\frac{2s}{d} + \left(\frac{2a-d}{2d}\right)^2\right]}$
15	$a,\ t,\ s$		$n = \frac{2s}{a+t}$
16	$d,\ t,\ s$		$n = \frac{2t+d}{2d} \pm \sqrt{\left[\left(\frac{2t+d}{2d}\right)^2 - \frac{2s}{d}\right]}$
17	$d,\ n,\ t$	a	$a = t - (n-1)\,d$
18	$d,\ n,\ s$		$a = \frac{s}{n} - \frac{(n-1)\,d}{2}$
19	$d,\ t,\ s$		$a = \frac{1}{2}d \pm \sqrt{\left[\left(t+\frac{1}{2}d\right)^2 - 2ds\right]}$
20	$n,\ t,\ s$		$a = \frac{2s}{n} - t$

. . . . . .

Что называется рядомъ перваго, втораго, третьяго и т. д. порядка? И какимъ образомъ слѣдующіе порядки выводятся изъ ряда перваго порядка: a, $a + d$, $a + 2d$, $a + 3d$, etc.

Что такое фигурныя числа? Какъ они выводятся изъ ряда, 1, $1 + d$, $1 + 2d$, etc.? — Какія числа въ

особенности, называются многоугольными и пирамидальными? (*)

Ряды перваго порядка, у которыхъ первый членъ есть 1.

$1, 2, 3, 4, 5, 6 \ldots\ldots\ldots\ldots n.$

$1, 3, 5, 7, 9, 11 \ldots\ldots\ldots\ldots 2n - 1.$

$1, 4, 7, 10, 13, 16 \ldots\ldots\ldots\ldots 3n - 2.$

$1, 5, 9, 13, 17, 21 \ldots\ldots\ldots\ldots 4n - 3.$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$1, 1 + d, 1 + 2d, 1 + 3d \ldots\ldots dn - d + 1.$

Многоугольныя числа.

$1, 3, 6, 10, 15, 21 \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2}.$

$1, 4, 9, 16, 25, 36 \ldots\ldots\ldots\ldots n^2.$

$1, 5, 12, 22, 35, 51 \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{n(3n-1)}{1 \cdot 2}.$

$1, 6, 15, 28, 45, 66 \ldots\ldots\ldots\ldots n(2n-1).$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$1, 2 + d, 3 + 3d, 4 + 6d \ldots\ldots \frac{n(dn - d + 2)}{1 \cdot 2}.$

(*) Справедливость общаго члена въ нижеслѣдующихъ рядахъ можно весьма легко доказать простымъ вычитаніемъ, или, наоборотъ, сложеніемъ; потому-что стоитъ только изъ общаго члена каждаго ряда вычесть непосредственно ему предшествующій, то получимъ общій членъ ряда, изъ коего онъ произошелъ чрезъ простое сложеніе. Такъ, напримѣръ, изъ общаго члена треугольныхъ чиселъ $\frac{n(n+1)}{1 \cdot 2}$ получится общій членъ натуральныхъ чиселъ $= \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} - \frac{(n-1)n}{1 \cdot 2} = n.$

Пирамидальныя числа.

$1, 4, 10, 20, 35, 56 \ldots\ldots\ldots \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}.$

$1, 5, 14, 30, 55, 91 \ldots\ldots\ldots \frac{n(n+1)(2n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3}.$

$1, 6, 18, 40, 75, 126 \ldots\ldots\ldots \frac{n^2(n+1)}{1 \cdot 2}.$

$1, 7, 22, 50, 95, 161 \ldots\ldots\ldots \frac{n(n+1)(4n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3}.$

. . . . . .

$1, 3+d, 6+4d, 10+10d \ldots\ldots \frac{n(n+1)(dn-d+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3}.$

Ряды, происходящіе отъ суммованія натуральныхъ чиселъ.

$1, 2, 3, 4, 5, 6 \ldots\ldots\ldots\ldots n.$

$1, 3, 6, 10, 15, 21 \ldots\ldots\ldots \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2}.$

$1, 4, 10, 20, 35, 56 \ldots\ldots\ldots \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}.$

$1, 5, 15, 35, 70, 126 \ldots\ldots\ldots \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}.$

и т. д.

2. Геометрическія прогрессіи.

I. Пусть a означаетъ первый членъ, e показателя, t послѣдній членъ, n число членовъ и s сумму геометрической прогрессіи, то

$$1)\ t = ae^{n-1}.$$

$$2)\ s = \frac{et - a}{e - 1} = \frac{a\,(e^n - 1)}{e - 1}.$$

Посредствомъ этихъ двухъ формулъ можно, по даннымъ a, e, n, опредѣлить t и s.

№	Данныя величины.			Искомыя величины.	
1	$a=1$,	$e=2$,	$n=7$	$t=64$,	$s=127$
2	$a=4$,	$e=3$,	$n=10$	$t=78732$,	$s=118096$
3	$a=5$,	$e=4$,	$n=9$	$t=327680$,	$s=436905$
4	$a=9$,	$e=\frac{7}{4}$,	$n=7$	$t=258\frac{2073}{4096}$,	$s=591\frac{741}{4096}$
5	$a=6\frac{1}{4}$,	$e=\frac{3}{2}$,	$n=8$	$t=106\frac{403}{512}$,	$s=307\frac{441}{512}$
6	$a=6$,	$e=\frac{3}{4}$,	$n=6$	$t=1\frac{217}{512}$,	$s=19\frac{373}{512}$
7	$a=8$,	$e=\frac{1}{2}$,	$n=15$	$t=\frac{1}{2048}$,	$s=15\frac{2047}{2048}$
8	$a=3\frac{1}{2}$,	$e=\frac{3}{5}$,	$n=8$	$t=\frac{15309}{156250}$,	$s=8\frac{45237}{75625}$
9	$a=\frac{5}{6}$,	$e=\frac{2}{3}$,	$n=11$	$t=\frac{2560}{177147}$,	$s=2\frac{166907}{354294}$
10	$a=3$,	$e=\frac{7}{5}$,	$n=25$	$t=9642,59...$,	$s=33741,59...$
11	$a=7\frac{1}{2}$,	$e=\frac{27}{20}$,	$n=31$	$t=60964,11...$,	$s=235125,85...$
12	$a=63$,	$e=\frac{157}{132}$,	$n=58$	$t=1238530,19..$,	$s=7777637,01...$
13	$a=5560$,	$e=\frac{9}{11}$,	$n=40$	$t=2,219309...$,	$s=30570,01310.$
14	$a=393\frac{1}{3}$,	$e=\frac{5}{12}$,	$n=17$	$t=0,0003246241$,	$s=674,2854824.$
15	$a=1$,	$e=\frac{1}{2}$,	$n=\infty$	$t=0$,	$s=2$
16	$a=40$,	$e=\frac{3}{7}$,	$n=\infty$	$t=0$,	$s=70$
17	$a=9$,	$e=\frac{2}{3}$,	$n=\infty$	$t=0$,	$s=27.$

Въ 10-мъ, 11-мъ, 12-мъ, 13-мъ и 14-мъ примѣрахъ удобнѣе вычислять t посредствомъ логариѳмовъ, послѣ чего величины для s легко опредѣлены быть могутъ.

. . . . . .

Чему равняется сумма геометрической прогрессіи: a, b, $\frac{b^2}{a}$, $\frac{b^3}{a^2}$, $\frac{b^4}{a^3}$, ... $\frac{b^{n-1}}{a^{n-2}}$, состоящей изъ n членовъ? И чему равняется сумма этой же прогрессіи, если она имѣетъ безконечное число членовъ?

Отв. Сумма конечной прогрессіи $= \frac{b^n - a^n}{(b-a)\,a^{n-2}} = \frac{a^n - b^n}{(a-b)\,a^{n-2}}$, а сумма безконечной $= \frac{a^2}{a-b}$.

Чему равняется сумма безконечнаго геометрическаго ряда: $a - b + \frac{b^2}{a} - \frac{b^3}{a^2} + \frac{b^4}{a^3} - \text{etc.}$

Отв. $\frac{a^2}{a+b}$.

Какимъ образомъ періодическую десятичную дробь. 0,868686... $= 86(0{,}01 + 0{,}0001 + 0{,}000001 + \ldots.)$ выразить простою дробью.

Отв. Дробь 0,868686... $= \frac{86}{99}$.

Какъ выразить періодическую десятичную дробь: 0,375375375... простою дробью?

Отв. Дробь 0,375375375... $= \frac{375}{999} = \frac{125}{333}$.

Какимъ образомъ также десятичную дробь 0,142857...., которой періодъ есть 142857 выразить простою?

Отв. Дробь 0,142857.... $= \frac{142857}{999999} = \frac{1}{7}$.

Слѣдовательно всякую безконечную періодическую десятичную дробь можно выразить конечною дробью.

. . . . . .

II. Ежели изъ пяти величинъ a, e, n, t, s, даны три, то всегда можно опредѣлить остальныя, руководствуясь нижеслѣдующею таблицею.

Таблица формулъ геометрическихъ прогрессій.

№	Данныя.	Искомыя.	Формулы.
1	a, e, n	t	$t = ae^{n-1}$.
2	a, e, s		$t = \frac{a + (e-1)s}{e}$
3	a, n, s		$t(s-t)^{n-1} - a(s-a)^{n-1} = 0$.
4	e, n, s		$t = \frac{(e-1)se^{n-1}}{e^n-1}$
5	a, e, n	s	$s = \frac{a(e^n-1)}{e-1}$
6	a, e, t		$s = \frac{et-a}{e-1}$
7	a, n, t		$s = \frac{t^{\frac{n}{n-1}} - a^{\frac{n}{n-1}}}{t^{\frac{n}{n-1}} - a^{\frac{d}{n-1}}}$
8	e, n, t		$s = \frac{t(e^n-1)}{(e-1)e^{n-1}}$
9	e, n, t	a	$a = \frac{t}{e^{n-1}}$
10	e, n, s		$a = \frac{(e-1)s}{e^n-1}$
11	e, t, s		$a = et - (e-1)s$
12	n, t, s		$a(s-a)^{n-1} - t(s-t)^{n-1} = 0$

№	Данныя.	Искомыя.	Формулы.
13	$a,\ n,\ t$	e	$e = \sqrt[n-1]{\left(\frac{t}{a}\right)}$
14	$a,\ n,\ s$		$e^n - \frac{s}{a} e + \frac{s-a}{a} = 0$
15	$a,\ t,\ s$		$e = \frac{s-a}{s-t}$
16	$n,\ t,\ s$		$e^n - \frac{s}{s-t} e^{n-1} + \frac{t}{s-t} = 0.$
17	$a,\ e,\ t$	n	$n = \frac{\log t - \log a}{\log e} + 1.$
18	$a,\ e,\ s$		$n = \frac{\log [a + (e-1)\ s] - \log a}{\log e}$
19	$a,\ t,\ s$		$n = \frac{\log t - \log a}{\log (s-a) - \log (s-t)} + 1$
20	$e,\ t,\ s$		$n = \frac{\log t - \log [et - (e-1)\ s]}{\log e} + 1.$

НЕПРЕРЫВНЫЯ ИЛИ ЦѢПНЫЯ ДРОБИ.

1. О непрерывныхъ дробяхъ вообще.

I. Непрерывною дробью называется дробь нижеслѣдующаго вида:

$$\cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \cfrac{1}{e + \text{etc.}}}}}}$$

коей значеніе видно уже изъ самаго изображенія оной. При семъ принимается, что величины, a, b, c, d, e, etc., кото-

рыя называются частными, суть числа цѣлыя и не меньше единицы. Дроби $\frac{1}{a}$, $\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b}}$ $\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c}}}$ etc.

называются дробями *приближающимися* къ данной, потому-что онѣ въ-самомъ-дѣлѣ тѣмъ болѣе приближаются къ данной дроби, чѣмъ далѣе будутъ продолжаемы.

II. Обративъ эти приближающіяся дроби въ простыя, получимъ нижеслѣдующія выраженія:

1) $\frac{1}{a}$

2) $\frac{b}{ab+1}$

3) $\frac{bc+1}{(ab+1)\ c+a}$

4) $\frac{(bc+1)\ d+b}{(abc+c+a)\ d+ab+1}$

5) $\frac{(bcd+d+b)\ e+bc+1}{(abcd+cd+ad+ab+1)\ e+abc+c+a}$

и т. д.

III. Эти послѣднія дробныя выраженія могутъ быть выведены одни изъ другихъ слѣдующимъ образомъ: пусть, напримѣръ, $\frac{R}{S}$ будетъ $(n-1)^{\text{ая}}$ дробь и $\frac{T}{V}$ будетъ $(n-2)^{\text{ая}}$ дробь; далѣе, q будетъ $n^{\text{ой}}$ изъ коэфиціентовъ a, b, c, d, etc., то $n^{\text{ая}}$ приближающаяся дробь будетъ: $\frac{qR+T}{qR+V}$.

IV. Найденная такимъ образомъ приближающаяся дробь будетъ имѣть всегда простѣйшій видъ; числитель и знаменатель оной будутъ также всегда несоизмѣримы между собою.

V. Приближающаяся дробь бываетъ попеременно болѣе и менѣе всей непрерывной дроби или величины, которой она равна.

VI. Разность между двумя послѣдовательными приближающимися дробями бываетъ попеременно положительная и отрицательная, и всегда изображается дробью, которой числитель $= 1$, а знаменатель есть произведеніе знаменателей сихъ двухъ приближающихся дробей.

VII. Величина непрерывной дроби будетъ извѣстна, когда частныя, входящія въ составъ приближающихся дробей, будутъ даны.

VIII. Дабы превратить величину X, какого бы вида она ни была, въ непрерывную дробь, то даютъ ей видъ: $a + \frac{1}{x}$, гдѣ a означаетъ наибольшое цѣлое число, содержащееся въ X, а потому при $X < 1$ можетъ-быть $= 0$. Равнымъ образомъ x даютъ видъ: $a' + \frac{1}{x'}$, знаменателю x' видъ: $a'' + \frac{1}{x''}$, знаменателю x'' видъ: $a''' + \frac{1}{x'''}$ и т. д., гдѣ a', a'', a''', etc. означаютъ наибольшія цѣлыя числа, содержащіяся въ x, x', x'', etc.; и такъ получимъ:

$$X = a + \cfrac{1}{a' + \cfrac{1}{a'' + \cfrac{1}{a''' + \text{etc.}}}}$$

Ежели величина X можетъ быть изображена простою дробью, то и непрерывная дробь кончится: въ противномъ же случаѣ она будетъ продолжаться до безконечности.

IX. Разность между величиною X и одною изъ приближающихся къ ней дробей всегда менѣе $\frac{1}{q^2}$, разумѣя подъ q знаменателя приближающейся дроби. А посему сіе служитъ вѣрнымъ средствомъ узнавать, до какой степени точности приблизились къ величинѣ для X.

2. Превращеніе обыкновенной дроби въ непрерывную.

Нижеслѣдующій примѣръ ясно показываетъ, какимъ образомъ должно поступать при разложеніи обыкновенной дроби въ непрерывную, основываясь на общемъ правилѣ, изложенномъ въ № VIII.

$$\frac{351}{965}=\frac{1}{2+\frac{263}{351}},\quad \frac{263}{351}=\frac{1}{1+\frac{88}{263}},\quad \frac{88}{263}=\frac{1}{2+\frac{87}{88}},$$

$$\frac{87}{88}=\frac{1}{1+\frac{1}{87}}.$$

Слѣдовательно: $\frac{351}{965}=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{87}}}}}$

Примѣры.

№	Данныя дроби.	Частныя.	Приближающіеся дроби.
1	$\frac{359}{965}$	2, 1, 2, 1, 87,	$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{3}{8}, \frac{4}{11}$
2	$\frac{251}{764}$	3, 22, 1, 4, 2,	$\frac{1}{3}, \frac{22}{67}, \frac{23}{70}, \frac{114}{347}$
3	$\frac{1769}{5537}$	3, 7, 1, 2, 4, 5, 1, 2,	$\frac{1}{3}, \frac{7}{22}, \frac{8}{25}, \frac{23}{72}, \frac{100}{313}, \frac{523}{1637}, \frac{623}{1950}$
4	$\frac{907}{18564}$	20, 2, 7, 5, 2, 1, 3,	$\frac{1}{20}, \frac{2}{41}, \frac{15}{307}, \frac{77}{1576}, \frac{169}{3459}, \frac{246}{5034}$
5	$\frac{1947}{3359}$	1, 1, 2, 1, 1, 1, 3, 2, 1, 1, 2, 3,	$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{4}{7}, \frac{7}{12}, \frac{11}{19}, \frac{40}{69}, \frac{91}{157}, \frac{131}{226}, \frac{222}{383}, \frac{575}{992}$
6	$\frac{587}{1943}$	3, 3, 4, 2, 3, 1, 1, 2,	$\frac{1}{3}, \frac{3}{10}, \frac{13}{43}, \frac{29}{96}, \frac{100}{331}, \frac{129}{427}, \frac{229}{758}$
7	$\frac{5065}{13891}$	2, 1, 2, 1, 7, 1, 1, 1, 2, 1, 13,	$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{3}{8}, \frac{4}{11}, \frac{31}{85}, \frac{35}{96}, \frac{66}{181}, \frac{101}{277}, \frac{268}{735}, \frac{369}{1012}$

№	Данныя дроби.	Частныя.	Приближающіеся дроби.
8	$\frac{5743}{80937}$	14, 10, 1, 2, 1, 3, 3, 3, 3,	$\frac{1}{14}, \frac{10}{141}, \frac{11}{155}, \frac{32}{451}, \frac{43}{606}, \frac{161}{2269}, \frac{526}{7413}, \frac{1739}{24508}$
9	$\frac{13957}{59476}$	4, 3, 1, 4, 1, 2, 1, 11, 2, 6,	$\frac{1}{4}, \frac{3}{13}, \frac{4}{17}, \frac{19}{81}, \frac{23}{98}, \frac{65}{277}, \frac{88}{375}, \frac{1033}{4402}, \frac{2154}{9179}$
10	$\frac{32157763}{94218374}$	29, 3, 2, 1, 8, 1, 1, 6, etc.	$\frac{1}{29}, \frac{3}{88}, \frac{7}{205}, \frac{10}{293}, \frac{87}{2549}, \frac{97}{2842}, \frac{184}{5391}$, etc.

Звѣздный мѣсяцъ, или время, въ которое мѣсяцъ свой оборотъ по звѣздному небу дѣйствительно совершаетъ, содержитъ, бравъ столѣтнюю сложность, среднимъ числомъ 27,321661 дней. Слѣдовательно въ продолженіе 27321661 дня онъ сдѣлаетъ 1000000 оборотовъ. Отношеніе это выраженное въ большихъ числахъ, изобразить въ меньшихъ?

Отв. Приближающіяся дроби къ 27,321661 суть $\frac{27}{1}$, $\frac{82}{3}$, $\frac{765}{28}$, $\frac{3907}{143}$, etc. Принявъ третью дробь, окажется, что въ 765 дней мѣсяцъ сдѣлаетъ 28 оборотовъ; время разнствующее отъ истиннаго на 0,0001 дня съ небольшимъ.

По Лапласу, одному изъ величайшихъ новѣйшихъ математиковъ, время оборота Меркурія = 87,969255, а Венеры = 224,700817 дня. Выразить времена этихъ оборотовъ въ меньшихъ числахъ?

Отв. Времена оборотовъ суть: Меркурія $\frac{87}{1}$, $\frac{88}{1}$, $\frac{2815}{32}$, etc., а Венеры $\frac{224}{1}$, $\frac{225}{1}$, $\frac{574}{3}$, $\frac{1573}{7}$, $\frac{2247}{10}$, $\frac{26290}{117}$, etc. Дроби $\frac{2815}{32}$ и $\frac{26290}{117}$ уже довольно точны.

Окружность круга содержится къ своему діаметру какъ 3,1415926535..... къ 1. Выразить это отношеніе въ меньшихъ числахъ.

Отв. 3 : 1; 22 : 7; 333 : 106; 355 : 113; 103993 : 333102; и т. д.

3) Превращеніе коренной величины $\sqrt{(A)}$ въ непрерывную дробь.

Здѣсь предполагается, что A есть число цѣлое. Нижеслѣдующій примѣръ ясно показываетъ, какимъ образомъ должно поступать, основываясь на общемъ правилѣ, изложенномъ въ № VIII.

$$x = (\sqrt{19}) = 4 + \frac{\sqrt{(19)} - 4}{1} \left(= \frac{1}{x} \right)$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{(19)} - 4} = \frac{\sqrt{(19)} + 4}{3} = 2 + \frac{\sqrt{(19)} - 2}{3} \left(= \frac{1}{x^{\text{I}}} \right)$$

$$x^{\text{I}} = \frac{3}{\sqrt{(19)} - 2} = \frac{\sqrt{(19)} + 2}{5} = 1 + \frac{\sqrt{(19)} - 3}{5} \left(= \frac{1}{x^{\text{II}}} \right)$$

$$x^{\text{II}} = \frac{5}{\sqrt{(19)} - 3} = \frac{\sqrt{(19)} + 3}{2} = 3 + \frac{\sqrt{(19)} - 3}{2} \left(= \frac{1}{x^{\text{III}}} \right)$$

$$x^{\text{III}} = \frac{2}{\sqrt{(19)} - 3} = \frac{\sqrt{(19)} + 3}{5} = 1 + \frac{\sqrt{(19)} - 2}{5} \left(= \frac{1}{x^{\text{IV}}} \right)$$

$$x^{\text{IV}} = \frac{5}{\sqrt{(19)} - 2} = \frac{\sqrt{(19)} + 2}{3} = 2 + \frac{\sqrt{(19)} - 4}{3} \left(= \frac{1}{x^{\text{V}}} \right)$$

$$x^{\text{V}} = \frac{3}{\sqrt{(19)} - 4} = \frac{\sqrt{(19)} + 4}{1} = 8 + \frac{\sqrt{(19)} - 4}{1} \left(= \frac{1}{x^{\text{VI}}} \right)$$

$$x^{\text{VI}} = \frac{1}{\sqrt{(19)} - 4} = \frac{\sqrt{(19)} + 4}{3} = 2 + \text{etc.}$$

Слѣдовательно здѣсь частныя будутъ: 4, 2, 1, 3, 1, 2, 8, 2, etc.

Примѣры.

№	Данныя коренныя величины.	Частныя.	Приближающіяся дроби.
1	$\sqrt{(28)}$	5, 3, 2, 3, 10, etc.	$\frac{5}{1}, \frac{16}{3}, \frac{37}{7}, \frac{127}{24}, \frac{1307}{247}$, etc.
2	$\sqrt{(31)}$	5, 1, 1, 3, 5, 3, 1, 1, 10, etc.	$\frac{5}{1}, \frac{6}{1}, \frac{11}{2}, \frac{39}{7}, \frac{206}{37}, \frac{657}{118}, \frac{863}{155}, \frac{1520}{273}, \frac{16063}{2885}$, etc.
3	$\sqrt{(44)}$	6, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 12, etc.	$\frac{6}{1}, \frac{7}{1}, \frac{13}{2}, \frac{20}{3}, \frac{53}{8}, \frac{73}{11}, \frac{126}{19}, \frac{199}{30}, \frac{2514}{379}$, etc.
4	$\sqrt{(45)}$	6, 1, 2, 2, 2, 12, etc.	$\frac{6}{1}, \frac{7}{1}, \frac{20}{3}, \frac{47}{7}, \frac{114}{17}, \frac{161}{24}, \frac{2046}{305}$, etc.
5	$\sqrt{(52)}$	7, 4, 1, 2, 1, 4, 14, etc.	$\frac{7}{1}, \frac{29}{4}, \frac{36}{5}, \frac{101}{14}, \frac{137}{19}, \frac{649}{90}, \frac{9223}{1279}$, etc.
6	$\sqrt{(53)}$	7, 3, 1, 1, 3, 14, etc.	$\frac{7}{1}, \frac{22}{3}, \frac{29}{4}, \frac{51}{7}, \frac{182}{25}, \frac{2599}{357}$, etc.
7	$\sqrt{(59)}$	7, 1, 2, 7, 2, 1, 14, etc.	$\frac{7}{1}, \frac{8}{1}, \frac{23}{3}, \frac{169}{22}, \frac{361}{47}, \frac{530}{69}, \frac{7781}{1013}$, etc.
8	$\sqrt{(67)}$	8, 5, 2, 1, 1, 7, 1, 1, 2, 5, 16, etc.	$\frac{8}{1}, \frac{41}{5}, \frac{90}{11}, \frac{131}{16}, \frac{221}{27}, \frac{1678}{205}, \frac{1899}{232}, \frac{3577}{437}, \frac{9053}{1106}, \frac{48842}{5967}, \frac{790525}{96578}$, etc.

Разсматривая со вниманіемъ частныя, относящіяся къ коренной величинѣ $\sqrt{(A)}$, легко замѣтить можно нижеслѣдующія свойства:

1) Частныя составляютъ періоды, а посему въ вышеприведенныхъ примѣрахъ достаточно было бы имѣть только первый періодъ. Онъ начинается со втораго частнаго и оканчивается частнымъ вдвое большимъ противъ перваго.

2) Откинувъ послѣднее частное періода, остальныя будутъ въ слѣдующемъ порядкѣ:

$$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \ldots\ldots \varepsilon, \delta, \gamma, \beta, \alpha$$

такъ что, ежели написать ихъ въ обратномъ порядкѣ, они будутъ совершенно одни и тѣ-же и по величинѣ и по порядку.

3) Пусть вообще $\frac{p}{q}$ означаетъ приближающуюся дробь, принадлежащую предпослѣднему частному какого ии есть періода, то всегда будетъ: $p^2 - Aq^2 = \pm 1$.

Вышеприведенные примѣры объясняютъ это по-крайней-мѣрѣ для перваго порядка, ибо: $127^2 - 28 \cdot 24^2 = +1$, $1520^2 - 31 \cdot 273^2 = +1$, $199^2 - 44 \cdot 30^2 = +1$, $161^2 - 45 \cdot 24^2 = +1$, $649^2 - 52 \cdot 90^2 = +1$, $182^2 - 53 \cdot 25^2 = -1$, $530^2 - 59 \cdot 69^2 = +1$, 48842^2, $-67 \cdot 5967^2 = +1$.

4) А именно будетъ $p^2 - Aq^2 = +1$, когда періодъ, относящійся къ числу A, будетъ состоять изъ четнаго числа частныхъ; ежели же число ихъ нечетное, то $p^2 - Aq^2$ будетъ поперемѣнно $= -1$ и $+1$.

5) При разложеніи, употребляемомъ для опредѣленія частныхъ, получаются всегда цѣлыя числа, а не дроби.

. . . . . .

Непрерывныя дроби имѣютъ, сверхъ вышеприведенныхъ, еще многія другія примѣчательныя свойства. Практическія приложенія оныхъ также весьма полезны. Съ помощью оныхъ можно, напримѣръ, отношенія выраженныя на весьма большихъ числахъ, изобразить въ меньшихъ съ величайшею точностью, какъ уже выше на нѣкоторыхъ примѣрахъ показано; то есть, строго можно доказать, что ежели отношеніе двухъ чиселъ напишемъ въ видѣ дроби и будемъ искать приблизи-

тельныя величины этого отношенія, то, кромѣ тѣхъ, которыя отъищутся посредствомъ непрерывныхъ дробей, нельзя найти въ меньшихъ числахъ другихъ, ближе подходящихъ къ данному отношенію.

Довольно полное и весьма понятное сочиненіе о непрерывныхъ дробяхъ есть: «Die Lehre von den continuirlichen Brüchen, nebst ihren vorzüglichsten Anwendungen auf Arithmetik und Algebra, vollständig abgehandelt von C. J. Kausler. Stuttgart, 1803.» Эта теорія изложена съ большими подробностями, но только въ отношеніи къ числамъ, въ Théorie des nombres Лежандра, гдѣ также приведены и доказательства послѣднихъ вышеозначенныхъ предложеній.

ОТДѢЛЕНІЕ ВТОРОЕ,

СОДЕРЖАЩЕЕ

АЛГЕБРАИЧЕСКІЯ УРАВНЕНІЯ.

СТРОГОЕ РѢШЕНІЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХЪ УРАВНЕНІЙ, СЪ НѢКОТОРЫМИ ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫМИ ПРИМѢЧАНІЯМИ.

1. Объ уравненіяхъ вообще.

I. *Уравненіемъ* вообще называется равенство двухъ выраженій, которыя называются частями онаго. Уравненіе, котораго обѣ части не тождественны, бываетъ или *аналитическое* или *алгебраическое*.

II. *Аналитическимъ уравненіемъ* называется такое, которое хотя по виду и не кажется тождественнымъ, но можетъ быть приведено къ таковому посредствомъ разложенія, или какого-либо переобразованія; ибо извѣстно изъ буквеннаго вычисленія, что одна и та же величина можетъ быть выражена многоразличными образами. Таковы были почти всѣ уравненія, встрѣчавшіяся въ предъидущемъ отдѣленіи. Ежели въ

аналитическое уравненіе входятъ буквы, то какія бы величины ни поставили вмѣсто оныхъ, всегда обѣ части уравненія будутъ равны между собою.

III. *Алгебраическое уравненіе*, напротивъ, есть такое, которое справедливо только въ томъ случаѣ, когда количествамъ, въ немъ находящимся и выраженнымъ буквами, даны будутъ или извѣстныя, непроизвольныя численныя величины, или, ежели по-крайней-мѣрѣ однимъ изъ нихъ дано будетъ такое отношеніе къ другимъ, что уравненіе обратится въ аналитическое, т. е. такое, справедливость котораго не зависитъ отъ величины другихъ. Къ этому роду можно отнести почти всѣ уравненія, встрѣчающіяся въ этомъ отдѣленіи.

IV. Итакъ *Алгебра* есть наука, помощью которой опредѣляются неизвѣстныя посредствомъ извѣстныхъ, употребляя къ этому различные знаки и уравненія. Слѣдовательно она занимается рѣшеніемъ задачъ. Разобравъ всѣ условія предложеннаго вопроса, ищутся отношенія между искомыми и данными, и эти отношенія выражаются помощью знаковъ и уравненій, различая данныя отъ искомыхъ однѣми только буквами. Послѣднія буквы алфавита употребляются для означенія искомыхъ величинъ.

V. *Анализъ новѣйшихъ* имѣетъ предметомъ единственно переобразованіе видовъ выраженій, и потому занимается только аналитическими уравненіями. Слѣдовательно анализъ новѣйшихъ существенно различествуетъ отъ алгебры, хотя высшія части этихъ обѣихъ наукъ нераздѣльны и требуютъ взаимнаго пособія. То, что обыкновенно разумѣютъ подъ названіемъ буквеннаго вычисленія, содержитъ только элементарную часть этой обширной отрасли науки о величинахъ.

VI. *Анализъ древнихъ* напротивъ, въ сущности мало разнится отъ алгебры; но усовершенствованное знакоположеніе этой послѣдней даетъ ей значительное преимущество предъ

первымъ. Впрочемъ, обѣ эти науки занимаются разыскиваніемъ искомыхъ посредствомъ данныхъ, опредѣляя ихъ взаимныя отношенія и приводя оныя въ простѣйшій, менѣе сложный видъ.

VII. Различныя свойства уравненій и рѣшенія ихъ изложены въ учебныхъ книгахъ. Впрочемъ, нижеслѣдующее заслуживаетъ быть особенно замѣченнымъ, ибо начинающій при рѣшеніи уравненій обыкновенно этимъ затрудняется. Для совершеннаго опредѣленія всѣхъ искомыхъ величинъ посредствомъ данныхъ, должно имѣть необходимо столько же уравненій, сколько неизвѣстныхъ. Изъ этихъ уравненій ни одно не должно быть аналитическимъ и ни одно не должно быть такимъ образомъ составлено, чтобъ оно было необходимымъ слѣдствіемъ одного или нѣсколькихъ изъ остальныхъ. Уравненія, неудовлетворяющія этимъ двумъ условіямъ, не могутъ быть употреблены при рѣшеніи задачи.

---

2. Уравненія первой степени.

a) Уравненія съ одною неизвѣстною величиною.

1) У. $ax \pm b = c$ (*).

Р. $x = \frac{c \mp b}{a}$.

2) У. $3a + x - 5b + 2 = 7b - a + c + 6$.

Р. $x = 12b - 4a + c + 4$.

3) У. $7 - 9a - 5x + 3cd + x = \frac{7}{4} - 3a - 2cd - 2x$.

Р. $x = \frac{21}{8} - 3a + \frac{5}{2}\,cd$.

4) У. $8x - 5 = 13 - 7x$.

Р. $x = 1\frac{1}{5}$.

(*) У. означаетъ уравненія, а Р. — рѣшеніе.

5) У. $13\frac{3}{4} - \frac{x}{2} = 2x - 8\frac{3}{4}$.

Р. $x = 9$.

6) У. $2x + 7 + \frac{3}{2}x = 6x - 23$.

Р. $x = 12$.

7) У. $12\frac{1}{4} + 3x - 6 - \frac{7x}{3} = \frac{3x}{4} - 5\frac{3}{8}$.

Р. $x = 139\frac{1}{2}$.

8) У. $-6\frac{1}{3}x + 158\frac{1}{2} - 10x = -\frac{37x}{6} + 19 + \frac{3}{8}x$.

Р. $x = 13\frac{59}{253}$.

9) У. $8\frac{3}{4} + \frac{3x}{7} - \frac{5}{6} + 2x - \frac{12x}{5} + 13 + \frac{x}{4} = 0$.

Р. $x = -75\frac{10}{117}$.

10) У. $\frac{3x}{5} - \frac{7x}{10} + \frac{3x}{4} - \frac{7x}{8} = -15$.

Р. $x = 66\frac{2}{3}$.

11) У. $3\frac{2}{3} - x - \frac{9x}{2} + 8 = -17 - \frac{3x}{5} + \frac{3}{2}x$.

Р. $x = 4\frac{23}{48}$.

12) У. $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} = 7x - 712 + \frac{x}{5}$.

Р. $x = 116\frac{148}{367}$.

13) У. $11\frac{1}{2}x = \frac{11}{8}x + 66\frac{3}{8} - 5x - 9\frac{1}{4}$.

Р. $x = 3\frac{94}{121}$.

14) У. $-\frac{16}{7}x = -\frac{1}{2}x + 412\frac{1}{2} - \frac{3}{5}x - 316\frac{1}{2}$.

Р. $x = -80\frac{80}{83}$.

15) У. $32\frac{1}{10}x + 176\frac{3}{4} - x = 19\frac{1}{3}x + 7345 - \frac{2x}{3}$.

Р. $x = 576\frac{399}{746}$.

16) У. $3{,}25x - 5{,}007 - x = 0{,}2 - 0{,}34x$.

Р. $x = 2{,}010424.....$

17) У. $13{,}2x - \frac{3x}{4} + 7{,}6953 = \frac{x}{5} + 7834{,}5.$

Р. $x = 638{,}92283.....$

18) У. $\frac{7{,}53x}{18} + 100 = \frac{2x}{5} + 3{,}86 - \frac{x}{6}.$

Р. $x = -519{,}67567.....$

19) У. $ax + c = bx + d.$

Р. $x = \frac{d-c}{a-b}.$

20) У. $\frac{f^2x}{cg} - \frac{a^2}{f} + cx = \frac{hx}{g} - c + (a+c)\,x.$

Р. $x = \frac{(a^2 - cf)\,cg}{(f^2 - ch - acg)\,f}.$

21) У. $x = a + \frac{bc}{d} + \frac{cfx}{dc}.$

Р. $x = \frac{(ad + bc)\,e}{de - cf}.$

22) У. $\frac{ex}{f} + \frac{cx}{d} + \frac{ax}{b} - g = h.$

Р. $x = \frac{(h + g)\,bdf}{b\,(de + cf) + adf}.$

23) У. $\frac{5}{6}\,ab + \frac{4}{5}\,ac - \frac{2}{3}\,cx = \frac{3}{4}\,ac + 2ab - 6cx.$

Р. $x = \frac{(70b - 3c)\,a}{320c}.$

24) У. $\frac{x}{a} - 1 - \frac{dx}{c} + 3ab = 0.$

Р. $x = \frac{ac\,(1 - 3ab)}{c - ad}.$

25) У. $\frac{ace}{d} - \frac{(a+b)^2x}{a} - bx = ae - 3bx.$

Р. $x = \frac{a^2e\,(c - d)}{(a^2 + b^2)\,d}.$

26) У. $\frac{a + 3x}{4a} - \frac{7a - 5x}{6b} + 3 - \frac{9x}{4} = \frac{x}{ab} + \frac{5x}{6b}.$

Р. $x = \frac{39ab - 14a^2}{27ab - 9b + 12}.$

27) У. $5a^3cx + ac^2x - 5abc^2 - 3a^3c^3 = 5a^2bcx + bc^2x - 3a^2bc^3 - 5a^2c^2.$

Р. $x = \frac{3a^2c^2 - 5ac}{5a^2 + c^2}.$

28) У. $2a^2b^2\ c + ab^2\ x - 2ab^3\ c - abc^2\ d - 3a^3\ x = (b^3 - 3a^2b)\ x - b^2c^2d.$

Р. $x = \frac{2ab^2c - bc^2d}{3a^2 - b^2}.$

29) У. $\frac{ab}{x} = bc + d + \frac{1}{x}.$

Р. $x = \frac{ab - 1}{bc + d}.$

30) У. $\frac{3a + x}{x} - 5 = \frac{6}{x}.$

Р. $x = \frac{3a - 6}{4}.$

31) У. $\frac{a^2x}{b - c} + dc = bx - ac.$

Р. $x = \frac{c\ (a + d)\ (b - c)}{b\ (b - c) - a^2}.$

32) У. $c = a + \frac{m\ (a - x)}{3a + x}.$

Р. $x = \frac{a\ (m - 3c + 3a)}{c - a + m}.$

33) У. $\frac{a\ (d^2 + x^2)}{dx} = ac + \frac{ax}{d}.$

Р. $x = \frac{d}{c}.$

34) У. $\frac{cx^m}{a + bx} = \frac{fx^m}{d + ex}.$

Р. $x = \frac{cd - af}{bf - ce} = \frac{af - cd}{ce - bf}.$

35) У. $\frac{7x^n}{x - 1} = \frac{6x^{n+1} + x^n}{x + 1} - \frac{3x^n + 6x^{n+2}}{x^2 - 1}.$

Р. $x = -\frac{11}{12}.$

36) У. $\frac{3a-5x}{a-c} + \frac{2a-x}{d} = \frac{a+f}{a-c} - dx.$

Р. $x = \frac{d\,(f-2a) - 2a\,(a-c)}{(a-c)\,(d^2-1) - 5d}.$

37) У. $\frac{a}{bx} + \frac{c}{dx} + \frac{e}{fx} + \frac{g}{hx} = k.$

Р. $x = \frac{adfh + bcfh + bdeh + bdfg}{bdfhk}.$

38) У. $\frac{3abc}{a+b} + \frac{a^2b^2}{(a+b)^3} + \frac{(2a+b)\,b^2x}{a\,(a+b)^2} = 3cx + \frac{bx}{a}.$

Р. $x = \frac{ab}{a+b}.$

39) У. $\frac{bx}{2b-a} - \frac{(3bc+ad)\,x}{2ab\,(a+b)} - \frac{5ab}{3c-d} = \frac{(3bc-ad)\,x}{2ab\,(a-b)}$

$- \frac{5a\,(2b-a)}{a^2-b^2}.$

Р. $x = \frac{5a\,(2b-a)}{3c-d}.$

40) У. $(a+x)\,(b+x) - a\,(b+c) = \frac{a^2c}{b} + x^2.$

Р. $x = \frac{ac}{b}.$

41) У. $\sqrt[m]{(x)} = a.$

Р. $x = a^m.$

42) У. $\sqrt[m]{(ax+b)} = \sqrt[m]{(cx+d)}.$

Р. $x = \frac{d-b}{a-c}.$

43) У. $h\sqrt[3]{(ax-b)} = k\sqrt[3]{(cx+dx-f)}.$

Р. $x = \frac{bh^3 - fk^3}{ah^3 - (c+d)\,k^3}.$

44) У. $\sqrt[3]{(a^2+c)} = \sqrt[4]{\left(\frac{a^2+c}{d\,(x+g)}\right)}.$

Р. $x = \frac{1}{d\sqrt[3]{(a^2+c)}} - g.$

45) У. $\sqrt[m]{(a+x)} = \sqrt[2m]{(x^2+5ax+b^2)}$.

Р. $x = \frac{a^2-b^2}{3a}$.

46) У. $c + b\sqrt[m]{(x+d)} = f$.

Р. $x = \left(\frac{f-c}{b}\right)^m - d$.

47) У. $\frac{ax}{b}\sqrt{(f^2x^2+d^2)} + \frac{afx^2}{b} = cx$.

Р. $x = \frac{b^2c^2-a^2d^2}{2abcf} = \frac{(bc+ad)\ (bc-ad)}{2abcf}$.

Логариѳмическія уравненія.

48) У. $a^x = b$.

Р. $x = \frac{\log b}{\log a}$.

49) У. $a^{mx}b^{nx} = c$.

Р. $x = \frac{\log c}{m \log a + n \log b} = \frac{\log c}{\log a^m b^n}$.

50) У. $a^{mx+f}\ b^{nx+g} = c^{px+h}\ d^{qx+k}$.

Р. $x = \frac{h \log c + k \log d - f \log a - g \log b}{m \log a + n \log b - p \log c - q \log d} = \left(\log \frac{c^h d^k}{a^f b^g}\right)$
$: \left(\log \frac{a^m b^n}{c^p d^q}\right)$.

51) У. $3^x = 177147$.

Р. $x = 11$.

52) У. $2^x = 769$.

Р. $x = 9{,}586839.....$

53) У. $(\frac{3}{4})^x = 51\frac{1}{2}$.

Р. $x = -13{,}701176.....$

54) У. $\left(\frac{756}{345}\right)^{\frac{3x}{2}} = 54783.$

Р. $x = 9{,}272299.....$

55) У. $\left(\frac{21}{20}\right)^{x} \left(\frac{5}{5}\right)^{\frac{7x}{2}} = \frac{7}{12}.$

Р. $x = 0{,}309928.$

56) У. $\left(\frac{295}{867}\right)^{3-x} = 632 \cdot \left(\frac{56}{39}\right)^{\frac{5x}{9}}.$

Р. $x = 11{,}040270.....$

57) У. $3^{2x} \cdot 5^{6x-7} = 9^{x-2} \cdot 7^{1-x}.$

Р. $x = 0{,}759965.....$

b) Уравненія со многими неизвѣстными величинами.

1) У. $\begin{cases} x + y = a \\ x - y = b \end{cases}$

Р. $x = \frac{a+b}{2}$, $y = \frac{a-b}{2}.$

2) У. $\begin{cases} 3x + 2y = 118 \\ x + 5y = 191 \end{cases}$

Р. $x = 16$, $y = 35.$

3) У. $\begin{cases} 7x + \frac{5}{2}y = 411\frac{1}{2} \\ 39x - 14y = -935\frac{9}{10} \end{cases}$

Р. $x = 17\frac{1}{2}$, $y = 115\frac{3}{5}.$

4) У. $\begin{cases} 5x - 8\frac{1}{2} = 7y - 44 \\ 2x = y + \frac{5}{7} \end{cases}$

Р. $x = 4\frac{1}{2}$, $y = 8\frac{2}{7}.$

5) У. $\begin{cases} 5\frac{3}{4}y - 11x = 4y + 117\frac{1}{8} \\ 8x + 175 = 2y \end{cases}$

Р. $x = 9$, $y = 123\frac{1}{2}$.

6) У. $\begin{cases} 7y = 2x - 3y \\ 19x = 60y + 621\frac{1}{4} \end{cases}$

Р. $x = 88\frac{3}{4}$, $y = 17\frac{3}{4}$.

7) У. $\begin{cases} 13x + 7y - 341 = 7\frac{1}{2}y + 43\frac{1}{2}x \\ 2x + \frac{1}{2}y = 1. \end{cases}$

Р. $x = -12$, $y = 50$.

8) У. $\begin{cases} 113\frac{1}{2}x - 27\frac{5}{7}y = 10y + 5488\frac{4}{7} \\ 9y - 347 = 5x - 420 \end{cases}$

Р. $x = 56$, $y = 23$.

9) У. $\begin{cases} 168\frac{15}{44} - 19x + \frac{3}{11}y = 12\frac{3}{4}x + 1084 \\ \frac{1}{3}x - 149\frac{1}{2} = 319\frac{2}{9} - \frac{7}{2}y \end{cases}$

Р. $x = -27\frac{2}{3}$, $y = 136\frac{5}{9}$.

10) У. $\begin{cases} x + y = 18{,}73 \\ 0{,}56x + 13{,}421y = 763{,}4 \end{cases}$

Р. $x = -39{,}8121\ldots$, $y = 58{,}5421\ldots$

11) У. $\begin{cases} (x + 5)(y + 7) = (x + 1)(y - 9) + 112 \\ 2x + 10 = 3y + 1. \end{cases}$

Р. $x = 3$, $y = 5$.

12) У. $\begin{cases} ax = by \\ x + y = c \end{cases}$

Р. $x = \frac{bc}{a+b}$, $y = \frac{ac}{a+b}$.

13) У. $\begin{cases} ax + by = c \\ fx + gy = h \end{cases}$

Р. $x = \frac{cg-bh}{ag-bf}$, $y = \frac{ah-cf}{ag-bf}$.

14) У. $\left\{\begin{array}{l}\frac{a}{b+y}=\frac{b}{3a+x}\\ ax+2by=d\end{array}\right\}$.

Р. $x=\frac{2b^2-6a^2+d}{3a}$, $y=\frac{3a^2-b^2+d}{3b}$.

15) У. $\left\{\begin{array}{l}bcx=cy-2b\\ b^2y+\frac{a(c^3-b^3)}{bc}=\frac{2b^3}{c}+c^3x\end{array}\right\}$

Р. $x=\frac{a}{bc}$, $y=\frac{a+2b}{c}$.

16) У. $\left\{\begin{array}{l}3x+5y=\frac{(8b-2f)bf}{b^2-f^2}.\\ b^2x-\frac{bcf^2}{b+f}+(b+c+f)fy=f^2x+(b+2f)bf\end{array}\right\}$

Р. $x=\frac{bf}{b-f}$, $y=\frac{bf}{b+f}$

17) У. $\left\{\begin{array}{l}x+y=10\\ x+z=19\\ y+z=23\end{array}\right\}$

Р. $x=3$, $y=7$, $z=16$.

18) У. $\left\{\begin{array}{l}x+y+z=29\frac{1}{4}\\ x+y-z=18\frac{1}{4}\\ x-y+z=13\frac{3}{4}\end{array}\right\}$

Р. $x=16$, $y=7\frac{3}{4}$, $z=5\frac{1}{2}$.

19) У. $\left\{\begin{array}{l}x+y+z=a\\ my=nx\\ pz=qx\end{array}\right\}$

Р. $x=\frac{amq}{mp+np+mq}$, $y=\frac{anp}{mp+np+mq}$,

$z=\frac{amq}{mp+np+mq}$.

20) У. $\begin{cases} 3x + 5y = 161 \\ 7x + 2z = 209 \\ 2y + z = 89 \end{cases}$

Р. $x = 17$, $y = 22$, $z = 45$.

21) У. $\begin{cases} y + \frac{1}{2}x = 41 \\ x + \frac{1}{4}z = 20\frac{1}{2} \\ y + \frac{1}{5}z = 34 \end{cases}$

Р. $x = 18$, $y = 32$, $z = 10$.

22) У. $\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \\ gy + hz = l \end{cases}$

Р. $x = \frac{ce - bf}{ae - bd}$, $y = \frac{af - cd}{ae - bd}$, $z = \frac{a(el - fg) - d(bl - cg)}{h(ae - bd)}$.

23) У. $\begin{cases} 53 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}z = y - 109 \\ \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}y = 26 \\ 5y = 4z \end{cases}$

Р. $x = 64$, $y = 80$, $z = 100$.

24) У. $\begin{cases} 2x - \frac{3}{4}y = 93 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}y \\ 7x - 5z = y + x - 86 \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{4}z = 58 \end{cases}$

Р. $x = 48$, $y = 54$, $z = 64$.

25) У. $\begin{cases} 3x - 100 = 5y + 360 \\ 2\frac{1}{3}x + 200 = 16\frac{1}{2}z - 610 \\ 2y + 3z = 548 \end{cases}$

Р. $x = 360$, $y = 124$, $z = 100$.

26) У. $\begin{cases} 4x + 7y + 159 = 0 \\ 3\frac{1}{3}x = \frac{1}{6}z - 55 \\ 2x + y + 9z = 498 \end{cases}$

Р. $x = -13\frac{1}{2}$, $y = -15$, $z = 60$.

27) У. $\left\{\begin{array}{l} 2x + 5y - 7z = -288 \\ 5x - y + 3z = 227 \\ 7x + 6y + z = 297 \end{array}\right\}$

Р. $x = 13,\ y = 24,\ z = 62.$

28) У. $\left\{\begin{array}{l} x + y + z = 30 \\ 8x + 4y + 2z = 50 \\ 27x + 9y + 3z = 64 \end{array}\right\}$

Р. $x = \frac{2}{3},\ y = -7,\ z = 36\frac{1}{3}.$

29) У. $\left\{\begin{array}{l} 18x - 7y - 5z = 11 \\ 4\frac{2}{5}y - \frac{2}{3}x + z = 108 \\ 3\frac{1}{2}z + 2y + \frac{3}{4}x = 80 \end{array}\right\}$

Р. $x = 12,\ y = 25,\ z = 6.$

30) У. $\left\{\begin{array}{l} ax + by + cz = h \\ a'x + b'y + c'z = h' \\ a''x + b''y + c''z = h'' \end{array}\right\}$

Р. $x = \dfrac{hb'c'' - hb''c' + h'b''c - h'bc'' + h''bc' - h''b'c}{ab'c'' - ab''c' + a'b''c - a'bc'' + a''bc' - a''b'c}$

$y = \dfrac{ah'c'' - ah''c' + a'h''c - a'hc'' + a''hc' - a''h'c}{ab'c'' - ab''c' + a'b''c - a'bc'' + a''bc' - a''b'h}$

$z = \dfrac{ab'h'' - ab''h' + a'b''h - a'bh'' + a''bh' - a''b'c}{ab'c'' - ab''c' + a'b''c - a'bc'' + a''bc' - a''b'c}$

31) У. $\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = a \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{z} = b \\ \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = c \end{array}\right\}$

Р. $x = \dfrac{2}{a+b-c},\ y = \dfrac{2}{a-b+c},\ z = \dfrac{2}{b+c-a}.$

32. У. $\left\{\begin{array}{l} \frac{2}{x} - \frac{5}{3y} + \frac{1}{z} = 3\frac{4}{27} \\ \frac{1}{4x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{z} = 6\frac{11}{72} \\ \frac{5}{6x} - \frac{1}{y} + \frac{4}{z} = 12\frac{1}{36} \end{array}\right\}$

Р. $x = 6$, $y = 9$, $z = \frac{1}{3}$.

33) У. $\left\{\begin{array}{l} \frac{2x + 3y}{x + y} = 2\frac{1}{5} \\ \frac{x + z}{5(x - z)} = \frac{1}{3} \\ \frac{10x - 3z}{4x - 2z} = 2\frac{9}{14} \end{array}\right\}$.

Р. $x = 4$, $y = 1$, $z = 1$, также можно взять $x = 16$, $y = 4$, $z = 4$; однимъ словомъ, задача эта принадлежитъ къ числу неопредѣленныхъ и допускаетъ безчисленное множество рѣшеній.

34) У. $\left\{\begin{array}{l} ax + by = l \\ cx + du = m \\ ex + fz = n \\ gy + hz = p \end{array}\right\}$

Р. $x = \frac{bhn + (gl - bp)f}{bch + afg}$

$y = \frac{afp + (el - an)h}{beh + afg}$

$z = \frac{bep + (an - el)g}{beh + afg}$

$u = \frac{bh(em - cn) + gf(am - cl) + bcfp}{d(beh + afg)}$.

35) У. $\left\{\begin{array}{l} x - 9y + 3z - 10u = 21 \\ 2x + 7y - z - u = 683 \\ 3x + y + 5z + 2u = 195 \\ 4x - 6y - 2z + 9u = 516 \end{array}\right\}$

Р. $x = 100$, $y = 60$, $z = -13$, $u = -50$.

36) У. $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & y & + & z & + & u & = & 1 \\ 16x & + & 8y & + & 4z & + & 2u & = & 9 \\ 81x & + & 27y & + & 9z & + & 3u & = & 36 \\ 256x & + & 64y & + & 16z & + & 4u & = & 100 \end{array}\right\}$

Р. $x = \frac{1}{4}$, $y = \frac{1}{2}$, $z = \frac{1}{4}$, $u = 0$.

37) У. $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} \frac{x}{3} & + & \frac{y}{5} & + & \frac{2z}{7} & = & 58 \\ \frac{5x}{4} & + & \frac{y}{6} & + & \frac{z}{3} & = & 76 \\ \frac{x}{2} & + & \frac{3z}{8} & + & \frac{u}{5} & = & 79 \\ y & + & z & + & u & = & 248 \end{array}\right\}$

Р. $x = 12$, $y = 30$, $z = 168$, $u = 50$.

38) У. $\left\{\begin{array}{l} \frac{xy}{ay + bx} = l \\ \frac{yz}{cz + dy} = m \\ \frac{xz}{ez + fx} = n \end{array}\right\}$

Р. $x = \frac{lmn\ (bde + acf)}{cfmn - bfln + bdlm}$

$y = \frac{lmn\ (bde + acf)}{afln + demn - adlm}$

$n = \frac{lmn\ (bde + acf)}{belm - cemn + aclm}$.

39) У. $\left\{\begin{array}{l} x + y + z + u + t = a \\ x + y + z + u + w = b \\ x + y + z + t + w = c \\ x + y + u + t + w = d \\ x + z + u + t + w = e \\ y + z + u + t + w = f \end{array}\right\}$

Р $x = \frac{s}{5} - f$, $y = \frac{s}{5} - e$, $z = \frac{s}{5} - d$, $u = \frac{s}{5} - c$, $t = \frac{s}{5} - b$, $w = \frac{s}{5} - a$.

(Полагая $a + b + c + d + e + f = s$).

3. Уравненія второй степени.

a) Уравненія съ одною неизвѣстною величиною.

Формула.

У. $x^2 + Px = Q$.

Р. $x = -\frac{P}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{P^2}{4} + Q\right)}$.

Примѣры.

1) У. $ax^2 = b$.

Р. $x = +\sqrt{\left(\frac{b}{a}\right)}$, $x = -\sqrt{\left(\frac{b}{a}\right)}$.

2) У. $x^2 + 6x = 27$.

Р. $x = 3$, $x = -9$.

3) У. $x^2 - 7x + 3\frac{1}{4} = 0$.

Р. $x = 6\frac{1}{2}$, $x = \frac{1}{2}$.

4) У. $x^2 - 5\frac{3}{4}$, $x = 18$.

Р. $x = 8$, $x = -2\frac{1}{4}$.

5) У. $3x^2 - 2x = 65$.

Р. $x = 5$, $x = -4\frac{1}{3}$.

6) У. $622x = 15x^2 + 6384$.

Р. $x = 22\frac{4}{5}$, $x = 18\frac{2}{3}$.

7) У. $20748 - 1616x + 21x^2 = 0$.

Р. $x = 60\frac{2}{3}$, $x = 16\frac{2}{7}$.

8) У. $9\frac{3}{5}\,x - 21\frac{15}{16} = x^2$.

Р. $x = 5\frac{17}{20}$, $x = 3\frac{3}{4}$.

9) У. $11\frac{3}{4}\,x - 3\frac{1}{2}\,x^2 = -41\frac{1}{4}$.

Р. $x = -2\frac{1}{7}$, $x = 5\frac{1}{2}$.

10) У. $9\frac{1}{3}\,x^2 - 90\frac{1}{3}\,x + 195 = 0.$

Р. $x = 6\frac{3}{7},\ x = 3\frac{1}{4}.$

11) У. $\frac{18x^2}{5} + \frac{18078x}{65} + 4728 = 0.$

Р. $x = -25\frac{10}{39},\ x = -52.$

12) У. $x^2 - 8x = 14.$

Р. $x = 4 + \sqrt{(30)},\ x = 4 - \sqrt{(30)}$

или $x = 9{,}4772.....,\ x = -1{,}4772.....$

13) У. $3x^2 + x = 7.$

Р. $x = \frac{-1 + \sqrt{(85)}}{6}\ x = \frac{-1 - \sqrt{(85)}}{6}$

или $x = 1{,}3699.....,\ x = -1{,}7032.....$

14) У. $118x - 2\frac{1}{2}\,x^2 = 20.$

Р. $x = \frac{118 + \sqrt{(13724)}}{5},\ x = \frac{118 - \sqrt{(13724)}}{5}$

или $x = 47{,}0298.....,\ x = 0{,}1701.....$

15) У. $6x - 30 = 3x^2.$

Р. $x = 1 + \sqrt{(-9)},\ x = 1 - \sqrt{(-9)}.$

16) У. $8x^2 - 7x + 34 = 0.$

Р. $x = \frac{7 + \sqrt{(-1039)}}{16},\ x = \frac{7 - \sqrt{(-1039)}}{16}$

17) У. $4x^2 - 9x = 5x^2 - 255\frac{3}{4} - 8x.$

Р. $x = 15\frac{1}{2},\ x = -16\frac{1}{2}.$

18) У. $80x + \frac{3x^2}{4} + \frac{21x - 27782}{12} = 1859\frac{1}{3} - 3x^2.$

Р. $x = -46,\ x = 24\frac{1}{5}.$

19) У. $\frac{x}{x + 60} = \frac{7}{3x - 5}.$

Р. $x = 14,\ x = -10.$

20) У. $\frac{40}{x-5}+\frac{27}{x}=13.$

Р. $x=9,\ x=1\frac{2}{13}.$

21) У. $\frac{8x}{x+2}-6=\frac{20}{3x}.$

Р. $x=10,\ x=-\frac{2}{3}.$

22) У. $\frac{48}{x+3}=\frac{165}{x+10}-5.$

Р. $x=5\frac{2}{5},\ x=5.$

23) У. $\frac{31}{6x}=\frac{16}{117-2x}+1.$

Р. $x=67\frac{1}{6},\ x=4\frac{1}{2}.$

24) У. $\frac{2x+3}{10-x}=\frac{2x}{25-3x}-6\frac{1}{2}.$

Р. $x=13\frac{22}{31},\ x=8.$

25) У. $\frac{25x+180}{10x-81}=\frac{40x}{5x-8}-\frac{3}{5}.$

Р. $x=14\frac{3}{5},\ x=\frac{72}{245}.$

26) У. $\frac{18+x}{6(3-x)}=\frac{20x+9}{19-7x}-\frac{65}{4(3-x)}.$

Р. $x=7\frac{22}{113},\ x=2\frac{1}{2}.$

27) У. $adx-acx^2=bcx-bd.$

Р. $x=\frac{d}{c},\ x=-\frac{b}{a}.$

28) У. $\frac{a^2x^2}{f^2}-\frac{2ax}{g}+\frac{f^2}{g^2}=0.$

Р. $x=\frac{f^2}{ag},\ x=\frac{f^2}{ag}.$

29) У. $abx^2 + \frac{3a^2x}{c} = \frac{6a^2+ab-2b^2}{c^2} - \frac{b^2x}{c}$.

Р. $x = \frac{2a-b}{ac}$, $x = -\frac{3a+2b}{bc}$.

30) У. $\frac{2c^2}{d^2} + \frac{ac}{d} - (a-b)(2c+ad)\frac{x}{d} = (a+b)\frac{cx}{d} - (a^2-b^2)x^2$.

Р. $x = \frac{2c+ad}{d(a+b)}$, $x = \frac{c}{d(a-b)}$.

31) У. $32a^{2m}c^{n-1} + 4a^{m+3}c^{n-1}(ac^3-2)x = a^7c^{n+2}x^2$.

Р. $x = 4a^{m-3}$, $x = -\frac{8a^{m-4}}{c^3}$.

32) У. $cx + \frac{ac}{a+b} = (a+b)x^2$.

Р. $x = \frac{c+\sqrt{(c^2+4ac)}}{2(a+b)}$, $x = \frac{c-\sqrt{(c^2+4ac)}}{2(a+b)}$.

33) У. $9a^4b^4x^2 - 6a^3b^2x - b^2 = 0$.

Р. $x = \frac{a+\sqrt{(a^2+b^2)}}{3a^2b^2}$, $x = \frac{a-\sqrt{(a^2+b^2)}}{3a^2b^2}$.

34) У. $abx^2 - 2x(a+b)\sqrt{(ab)} = (a-b)^2$.

Р. $x = \frac{a+b\pm\sqrt{(2a^2+2b^2)}}{\sqrt{(ab)}}$.

35) У. $ax^2 + b^2 + c^2 = a^2 + 2bc + 2(b-c)x\sqrt{(a)}$.

Р. $x = \frac{b-c+a}{\sqrt{(a)}}$, $x = \frac{b-c-a}{\sqrt{(a)}}$.

36) У. $cx^2 - 2cx\sqrt{(d)} = dx^2 - cd$.

Р. $x = \frac{\sqrt{(cd)}}{\sqrt{(c)}+\sqrt{d)}}$, $x = \frac{\sqrt{(cd)}}{\sqrt{(c)}-\sqrt{(d)}}$.

37) У. $(4a^2 - 9cd^2)x^2 + (4a^2c^2 + 4abd^2)x + (ac^2 + bd^2)^2 = 0$.

Р. $x = -\frac{ac^2+bd^2}{2a+3d\sqrt{(c)}}$, $x = -\frac{ac^2+bd^2}{2a+3d\sqrt{(c)}}$.

38) У. $ab^3 x^2 + (1 + c) bd \sqrt{(c)} + cb^2 x^2 = [b^3 d \sqrt{(c)} + (ab + c)(1 + c)] x.$

Р. $x = \frac{bd \sqrt{(c)}}{ab + c}$, $x = \frac{1 + c}{b^2}$.

39) У. $\frac{5a + 10ab^2}{9b^2 - 3a^2b^2} x^2 - \left(\frac{5 \sqrt{(a + b)}}{3b^3} + \frac{(1 + 2b^2) cd \sqrt{(c)}}{3 - a^2}\right) x + \frac{cd}{ab} \sqrt{(a + b)}\, c = 0.$

Р. $x = \frac{(3 - a^2) \sqrt{(a + b)}}{ab\,(1 + 2b^2)}$, $x = \frac{3b^2 cd \sqrt{(c)}}{5a}$.

40) У. $ax = b + \sqrt{(cx)}$.

Р. $x = \frac{2ab + c + \sqrt{(4abc + c^2)}}{2a^2}$ (*).

41) У. $3 \sqrt{(112) - 8x)} = 19 + \sqrt{(3x + 7)}$.

Р. $x = 6$.

42) У. $\sqrt{(2x + 7)} + \sqrt{(3x - 18)} = \sqrt{(7x + 1)}$.

Р. $x = 9$.

43) У. $5 \sqrt{(62 + 3x)} - \frac{1}{2} \sqrt{(95\frac{2}{3} - 5x)} = 41$.

Р. $x = 6\frac{1}{3}$.

44) У. $7 \sqrt{(\frac{3}{2} x - 5)} - \sqrt{\left(\frac{x}{5} + 45\right)} - \frac{7}{4} \sqrt{(10x + 56)} = 0$.

Р. $x = 20$.

(*) Здѣсь должно принимать только одну эту величину для x, потому что другая удовлетворяетъ уравненію: $ax = b - \sqrt{(cx)}$, ибо какъ сіе послѣднее, такъ и 40-е уравненія, оба приводятъ къ одному и тому же окончательному уравненію: $a^2 x^2 - (2ab + c) x + b^2 = 0$. То же самое должно разумѣть и объ уравненіяхъ 41-мъ, 42-мъ, 43-мъ и 44-мъ.

45) У. $ax^{2n} + bx^n = c.$

Р. $x = \sqrt[n]{\left(\frac{-b+\sqrt{(b^2+4ac)}}{2a}\right)}.$

$x = \sqrt[n]{\left(\frac{-b-\sqrt{(b^2+4ac)}}{2a}\right)}.$

46) У. $x^4 - 72x^2 = 1225.$

Р. $x = \pm 5,\ x = \pm 7.$

47) У. $3x^6 + 42x^3 = 3321.$

Р. $x = 3,\ x = -\sqrt[3]{(41)}.$

b) Уравненія со многими неизвѣстными величинами.

1) У. $\begin{cases} x^2 + y^2 = a \\ x^2 - y^2 = b \end{cases}$

Р. $x = \pm\sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)},\ y = \pm\sqrt{\left(\frac{a-b}{2}\right)}.$

2) У. $\begin{cases} x + y = a \\ xy = b \end{cases}$

Р. $x = \frac{a + \sqrt{(a^2 - 4b)}}{2},\ y = \frac{a - \sqrt{(a^2 - 4b)}}{2}$

или $x = \frac{a - \sqrt{(a^2 - 4b)}}{2},\ y = \frac{a + \sqrt{(a^2 - 4b)}}{2}.$

3) У. $\begin{cases} x + y = a \\ x^2 + y^2 = b \end{cases}$

Р. $x = \frac{a + \sqrt{(2b - a^2)}}{2},\ y = \frac{a - \sqrt{(2b - a^2)}}{2}$

или $x = \frac{a - \sqrt{(2b - a^2)}}{2},\ y = \frac{a + \sqrt{(2b - a^2)}}{2}.$

4) У. $\begin{cases} xy = a \\ x^2 + y^2 = b \end{cases}$

Р. $x = \pm\sqrt{\left(\frac{b + \sqrt{(b^2 - 4a^2)}}{2}\right)}$

$y = \pm\sqrt{\left(\frac{b - \sqrt{(b^2 - 4a^2)}}{2}\right)}.$

или $x = \pm \sqrt{\left(\frac{b - \sqrt{(b^2 - 4a^2)}}{2}\right)}$

$y = \pm \sqrt{\left(\frac{b + \sqrt{(b^2 - 4a^2)}}{2}\right)}$.

5) У. $\begin{cases} x + y = a \\ x^2 + y^3 = b \end{cases}$

Р. $x = \frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{4b - a^3}{12a}\right)}$, $y = \frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{4b - a^3}{12a}\right)}$

или $x = \frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{4b - a^3}{12a}\right)}$, $y = \frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{4b - a^3}{12a}\right)}$.

6) У. $\begin{cases} 2x + 3y = 118 \\ 5x^2 - 7y^2 = 4333 \end{cases}$

Р. $x = 35$, $y = 16$.

или $x = -229\frac{6}{17}$, $y = 192\frac{4}{17}$.

7) У. $\begin{cases} ax + by = h \\ cx^2 + dy^2 = k \end{cases}$

Р. $x = \frac{adh \pm b\sqrt{(a^2dk - cdh^2 + b^2ck)}}{a^2d + b^2c}$

$y = \frac{bch \mp a\sqrt{(a^2dk - cdh^2 + b^2ck)}}{a^2d + b^2c}$.

8) У. $\begin{cases} x^2 - y^2 = h \\ (x + y + a)^2 + (x - y + a)^2 = k \end{cases}$

Р. $x = \frac{-a \pm \sqrt{(2h + k - a^2)}}{2}$

$y = \pm \sqrt{\left(\frac{\frac{1}{2}k - h \mp a\sqrt{(2h + k - a^2)}}{2}\right)}$.

9) У. $\begin{cases} \frac{18x}{y} = \frac{8y}{x} \\ 3xy + 2x + y = 485 \end{cases}$

Р. $x = 10,\ y = 15$

или $x = -10\frac{7}{9},\ y = -16\frac{1}{6}$ (*).

10) У. $\left\{\begin{array}{l} \frac{ax}{y} = \frac{by}{y} \\ cxy + dx + cy = h \end{array}\right\}$

Р. $\left\{\begin{array}{l} x = \frac{-[e\sqrt{(a)}+d\sqrt{(b)}]\pm\sqrt{[(e\sqrt{(a)}+d\sqrt{(b)})^2+4ch\sqrt{(ab)}]}}{2c\sqrt{(a)}} \\ y = \frac{-[e\sqrt{(a)}+d\sqrt{(b)}]\pm\sqrt{[(e\sqrt{(a)}+d\sqrt{(b)})^2+4ch\sqrt{(ab)}]}}{2c\sqrt{(b)}} \end{array}\right\}$

или $\left\{\begin{array}{l} x = \frac{-[e\sqrt{(a)}-d\sqrt{(b)}]\pm\sqrt{[(e\sqrt{(a)}-d\sqrt{(b)})^2-4ch\sqrt{(ab)}]}}{2c\sqrt{(a)}} \\ y = \frac{+[e\sqrt{(a)}-d\sqrt{(b)}]\mp\sqrt{[(e\sqrt{(a)}-d\sqrt{(b)})^2-4ch\sqrt{(ab)}]}}{2c\sqrt{(b)}} \end{array}\right\}$ (**)

11) У. $\left\{\begin{array}{l} x + y + x^2 + y^2 = a \\ x - y + x^2 - y^2 = b \end{array}\right\}$

Р. $x = \frac{-1 \pm \sqrt{(2a + 2b + 1)}}{2}$

$y = \frac{-1 \pm \sqrt{(2a - 2b + 1)}}{2}$

или $x = \frac{-1 \pm \sqrt{(2a - 2b + 1)}}{2}$

$y = \frac{-1 \mp \sqrt{(2a - 2b + 1)}}{2}$ (***).

(*) Этимъ уравненіямъ удовлетворяютъ еще двѣ слѣдующія величины:

$$x = \frac{1 + \sqrt{(-34919)}}{18},\ y = \frac{-1 - \sqrt{(-34919)}}{12}$$

и $$x = \frac{1 - \sqrt{(-34919)}}{18},\ y = \frac{-1 + \sqrt{(-34919)}}{12}$$

которыя очевидно мнимыя.

(**) Итакъ эти уравненія даютъ 4 пары соотвѣтствующихъ величинъ для x и y.

(***) Эти уравненія также даютъ 4 пары соотвѣтствующихъ величинъ для x и y.

12) У. $\begin{cases} x + y = xy \\ x + y + x^2 + y^2 = a \end{cases}$

Р. $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{(4a+1)} + \sqrt{[4a - 6 \mp 6\sqrt{(4a+1)}]}}{4}$

$y = \dfrac{1 \pm \sqrt{(4a+1)} - \sqrt{[4a - 6 \mp 6\sqrt{(4a+1)}]}}{4}$ (*).

13) У. $\begin{cases} ax - by = g \\ a^3x^3 - b^3y^3 = hxy \end{cases}$

Р. $x = \dfrac{g}{2a}\left[1 \pm \sqrt{\left(\dfrac{h + abg}{h - 3abg}\right)}\right]$,

$y = \dfrac{g}{2b}\left[-1 \pm \sqrt{\left(\dfrac{h + abg}{h - 3abg}\right)}\right]$.

14) У. $\begin{cases} (x - y)(x^2 - y^2) = a \\ (x + y)(x^2 + y^2) = b \end{cases}$

Р. $x = \dfrac{\sqrt{(2b - a)} \pm \sqrt{(a)}}{2\sqrt[6]{(2b - a)}}$, $y = \dfrac{\sqrt{(2b - a)} \mp \sqrt{(a)}}{2\sqrt[6]{(2b - a)}}$.

15) У. $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a \\ y^2 = 2xz + b \\ cx = dz \end{cases}$

Р. $x = \dfrac{d\sqrt{(a - b)}}{c + d}$, $y = \dfrac{\sqrt{[2acd + b(c^2 + d^2)]}}{c + d}$

$z = \dfrac{c\sqrt{(a - b)}}{c + d}$.

16) У. $\begin{cases} x(y + z) = a \\ y(x + z) = b \\ z(x + y) = c \end{cases}$

Р. $x = \pm\sqrt{\left(\dfrac{(a - c + b)(a - b + c)}{2(c - a + b)}\right)}$

$y = \pm\sqrt{\left(\dfrac{(a - c + b)(c - a + b)}{2(a - b + c)}\right)}$

$z = \pm\sqrt{\left(\dfrac{(c - a + b)(a - b + c)}{2(a - c + b)}\right)}$.

(*) Величины для x и y также могутъ быть замѣнены одна другою.

17) У. $\left\{\begin{array}{l} \dfrac{xyz}{x+y} = a \\ \dfrac{xyz}{x+z} = b \\ \dfrac{xyz}{x+z} = c \end{array}\right\}$

Р. $x = \pm \sqrt{\left(\dfrac{2abc\ (ab - ac + bc)}{(ab + ac - bc)\ (bc + ac - ab)}\right)}$

$y = \pm \sqrt{\left(\dfrac{2abc\ (bc + ac - ab)}{(ab + ac - bc)\ (ab - ac + bc)}\right)}$

$z = \pm \sqrt{\left(\dfrac{2abc\ (ab + ac - bc)}{(ab - ac + bc)\ (bc + ac - ab)}\right)}$

18) У. $\left\{\begin{array}{l} xy = p \\ (b - y)\ z = p' \\ (a - x)\ (c - z) = p'' \end{array}\right\}$

Р. $x = \dfrac{-A \pm \sqrt{[A^2 - 4p\ (p' - bc)\ (p'' - ac)]}}{2\ (p' - bc)}$,

$y = \dfrac{-A \mp \sqrt{[A^2 - 4p\ (p' - bc)\ (p'' - ac)]}}{2\ (p'' - ac)}$,

$z = \dfrac{-B \mp \sqrt{[B^2 - 4p'\ (p' - ab)\ (p'' - ac)]}}{2\ (p - ab)}$,

(Полагая $cp - ap' - bp'' + abc = A$ и $cp - ap' + bp'' - abc = B$).

19) У. $\left\{\begin{array}{l} x^2 + y^2 + z^2 = k \\ ax + a'y + a''z = 0 \\ bx + b'y + b''z = 0 \end{array}\right\}$

Р. $x = (a'b'' - a''b')\ A$, $y = (a''b - ab'')\ A$,

$z = (ab' - a'b)\ A$.

$\left[\text{Полагая } \pm \sqrt{\left(\dfrac{k}{(ab' - a'b)^2 + (a'b'' - a''b')^2 + (a''b - ab'')^2}\right)} = A\right]$.

20) У. $\left\{\begin{array}{l} axy + bx + cy + d = 0 \\ a'yz + b'y + c'z + d' = 0 \\ a''zx + b''z + c''x + d'' = 0 \end{array}\right\}$

Р. Исключеніе y и z приводятъ къ слѣдующему уравненію второй степени:

$$(a''x + b'')\,[(bb' - ad')\,x + b'd - cd'] + (c''x + d'')\,[(ac' - a'b)\,x + cc' - a'd] = 0.$$

Найдя отсюда x, опредѣляется также y и z. Послѣдніе два рода уравненій представлены въ болѣе общемъ видѣ на страницѣ 142-й.

---

4) Рѣшеніе уравненій высшихъ степеней.

a) Рѣшеніе уравненій посредствомъ Кардановой формулы.

У. $x^3 = Px + Q.$

$$\text{Р. } x = \sqrt[3]{\left\{\frac{Q + \sqrt{\left(Q^2 - \frac{4p^2}{27}\right)}}{2}\right\}} + \sqrt[3]{\left\{\frac{Q - \sqrt{\left(Q^2 - \frac{4p^3}{27}\right)}}{2}\right\}}$$

Примѣры.

1) У. $x^3 - 3x - 2 = 0.$

Р. $x = 2.$

2) У. $x^3 + 12x + 63 = 0.$

Р. $x = -3.$

3) У. $x^3 - 21x + 344 = 0.$

Р. $x = -8.$

4) У. $x^3 - 6x - 40 = 0.$

$$\text{Р. } x = \sqrt[3]{[20 + \sqrt{(292)}]} + \sqrt[3]{[20 - \sqrt{(392)}} = \sqrt[3]{[2 + \sqrt{(2)}]^3} + \sqrt[3]{[2 - \sqrt{(2)}]^3} = 4.$$

5) У. $x^3 + 3x - 14 = 0.$

Р. $x = \sqrt[3]{[7 + \sqrt{(50)}]} + \sqrt[3]{[7 - \sqrt{(50)}]}$

$= \sqrt[3]{[1 + \sqrt{(2)}]^3} + \sqrt[3]{[1 - \sqrt{(2)}]^3} = 2.$

6) У. $x^3 - \frac{15}{2}x + 290\frac{1}{2} = 0.$

Р. $x = \sqrt[3]{\left(\frac{-581+\sqrt{(337311)}}{4}\right)} + \sqrt[3]{\left(\frac{-581-\sqrt{(337311)}}{4}\right)}$

$= \sqrt[3]{\left(\frac{-7+\sqrt{(39)}}{2}\right)^3} + \sqrt[5]{\left(\frac{-7-\sqrt{(39)}}{2}\right)^3} = -7.$

7) У. $x^3 - 12x^2 + 57x - 94 = 0.$

Р. $x = 4 + \sqrt[3]{(3)} - \sqrt[3]{(9)} = 3{,}36216.....$

8) У. $x^3 - 12x - 28 = 0.$

Р. $x = \sqrt[3]{[14 + \sqrt{(132)}]} + \sqrt[3]{(14 - \sqrt{(132)}]}$

$= 4{,}30213.....$

9) У. $x^3 + 6x^2 + 20x + 15 = 0.$

Р. $x = -2 + \sqrt[3]{\left(\frac{81+\sqrt{(12705)}}{18}\right)} + \sqrt[3]{\left(\frac{81-\sqrt{(12705)}}{18}\right)}$

$= -2 + \sqrt[3]{\left(\frac{3+\sqrt{(105)}}{6}\right)^3} + \sqrt[3]{\left(\frac{3-\sqrt{(105)}}{6}\right)^3}$

$= -1.$

10) У. $x^3 - 15x^2 + 71x - 297 = 0.$

Р. $x = 5 + \sqrt[3]{\left(\frac{864+\sqrt{(746304)}}{9}\right)} + \sqrt[3]{\left(\frac{864-\sqrt{(746304)}}{9}\right)}$

$= 5 + \sqrt[3]{\left(\frac{9+\sqrt{(69)}}{3}\right)^3} + \sqrt[3]{\left(\frac{9-\sqrt{(69)}}{3}\right)} = 11.$

11) У. $x^3 - 12x^2 + 36x - 7 = 0.$

Р. $x = 4 + \sqrt[3]{\left(\frac{-9+\sqrt{(-175)}}{2}\right)} + \sqrt[3]{\left(\frac{-9-\sqrt{(-175)}}{2}\right)}$

$= 4 + \sqrt[3]{\left(\frac{3+\sqrt{(-7)}}{2}\right)} + \sqrt[3]{\left(\frac{3-\sqrt{(-7)}}{2}\right)^3} = 7.$

b) Рѣшеніе уравненій, имѣющихъ одинъ или нѣсколько раціональныхъ (соизмѣримыхъ) корней (*).

1) У. $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0.$

К. 2, 3, 4.

2) У. $x^3 - 8x^2 + 5x + 14 = 0.$

К. — 1, 2, 7.

3) У. $x^3 - 49x - 120 = 0.$

К. — 3, — 5, 8.

4) У. $x^3 - 18x^2 + 87x - 110 = 0.$

К. 2, 5, 11.

5) У. $x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24 = 0.$

К. 1, 2, 3, 4.

6) У. $x^4 - 45x^2 - 40x + 84 = 0.$

К. 1, — 2, — 6, 7.

7) У. $x^4 + 29x^3 + 287x^2 + 1147x + 1560 = 0.$

К. — 3, — 5, — 8, — 13.

8) У. $x^3 + \frac{17}{4}x^2 - \frac{79}{8}x - \frac{15}{4} = 0.$

К. $\frac{1}{2}$, $\frac{5}{4}$, — 6.

9) У. $x^3 - \frac{13}{12}x^2 + \frac{3}{8}x - \frac{1}{24} = 0.$

К. $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$.

10) У. $x^3 - \frac{14}{3}x^2 + 7x - \frac{10}{3} = 0.$

К. 1, $\frac{5}{3}$, 2.

11) У. $x^3 + \frac{8}{5}x^2 + \frac{9}{100}x - \frac{9}{100} = 0.$

К. $\frac{1}{5}$, $-\frac{3}{10}$, $-\frac{3}{2}$.

(*) К. означаетъ корни уравненія.

12) У. $x^3 - \frac{39}{28}x^2 + \frac{37}{56}x - \frac{3}{56} = 0.$

К. $\frac{1}{2}, \frac{1}{7}, \frac{3}{4}.$

13) У. $x^3 - \frac{139}{24}x^2 + \frac{329}{48}x + \frac{55}{16} = 0.$

К. $-\frac{3}{8}, \frac{5}{2}, \frac{11}{3}.$

14) У. $x^3 + \frac{82}{15}x^2 - \frac{173}{5}x - \frac{126}{5} = 0.$

К. $-\frac{2}{3}, \frac{21}{5}, -9.$

15) У. $x^4 - \frac{19}{4}x^3 + \frac{49}{8}x^2 - \frac{11}{4}x + \frac{3}{8} = 0.$

К. $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, 1, 3.$

16) У. $x^4 - \frac{41}{8}x^3 + \frac{287}{32}x^2 - \frac{393}{64}x + \frac{45}{32} = 0.$

К. $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{15}{8}, 2.$

17) У. $x^3 - 14x^2 - 5x + 70 = 0.$

К. $14, +\sqrt{(5)}, -\sqrt{(5)}.$

18) У. $x^2 - 13x^2 + 49x - 45 = 0.$

К. $5, 4 + \sqrt{(7)}, 4 - \sqrt{(7)}.$

19) У. $x^3 - 13x^2 + 38x + 16 = 0.$

К. $8, \frac{5}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(33)}, \frac{5}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(33)}.$

20) У. $x^3 - 6x^2 + 19x - 44 = 0.$

К. $4, 1 + \sqrt{(-10)}, 1 - \sqrt{(-10)}.$

21) У. $x^3 + \frac{7}{6}x^2 + \frac{13}{2}x + \frac{21}{2} = 0.$

К. $-\frac{3}{2}, \frac{1}{6} + \frac{1}{6}\sqrt{(-251)}, \frac{1}{6} - \frac{1}{5}\sqrt{(-251)}.$

22) У. $x^4 + x^3 - 24x^2 + 43x - 21 = 0.$

К. $1, 3, -\frac{5}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(53)}, -\frac{5}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(53)}.$

23) У. $x^5 - 3x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 9x + 27 = 0.$

К. $3, 3, -3, +\sqrt{(-1)}, -\sqrt{(-1)}.$

24) У. $x^5 - \frac{3}{2}\, 4x^4 - 6x^3 + 9x^2 - 13x + 19\frac{1}{2} = 0.$

К. $\frac{3}{2}$, $+\sqrt{[3 + \sqrt{(22)}]}$, $-\sqrt{[3 + \sqrt{(22)}]}$,
$+\sqrt{[3 - \sqrt{(22)}]}$, $-\sqrt{[3 - \sqrt{(22)}]}$.

---

5. Общіе случаи, въ которыхъ уравненія со многими неизвѣстными удобно рѣшаются.

I. Изобразимъ чрезъ x', x'', x''',.... $x^{n'}$, n неизвѣстныхъ величинъ. Ежели имѣетъ уравненіе вида:

$$a^{\prime}x^{\prime m} + a^{\prime\prime}x^{\prime\prime m} + a^{\prime\prime\prime}x^{\prime\prime\prime\, m} + \ldots\ldots + a^{n'}(x^{n'})^m = K.$$

и сверхъ того $n - 1$ уравненій нижеслѣдующаго вида:

$$b^{\prime}x^{\prime} + b^{\prime\prime}x^{\prime\prime} + b^{\prime\prime\prime}x^{\prime\prime\prime} + b^{\prime\prime\prime\prime}x^{\prime\prime\prime\prime} + \ldots\ldots + b^{n'}x^{n'} = 0$$
$$c^{\prime}x^{\prime} + c^{\prime\prime}x^{\prime\prime} + c^{\prime\prime\prime}x^{\prime\prime\prime} + c^{\prime\prime\prime\prime}x^{\prime\prime\prime\prime} + \ldots\ldots + c^{n'}x^{n'} = 0$$
$$d^{\prime}x^{\prime} + d^{\prime\prime}x^{\prime\prime} + d^{\prime\prime\prime}x^{\prime\prime\prime} + d^{\prime\prime\prime\prime}x^{\prime\prime\prime\prime} + \ldots\ldots + d^{n'}x^{n'} = 0$$

и т. д.

въ которыхъ неизвѣстныя величины не превосходятъ первой степени, то разрѣшивъ эти послѣднія $n - 1$ уравненій, можно будетъ выразить всѣ неизвѣстныя величины посредствомъ одной изъ нихъ, напримѣръ, посредствомъ $x^{\prime}$, такъ-что получимъ: $x^{\prime\prime} = A^{\prime\prime}$, $x^{\prime}$, $x^{\prime\prime\prime} = A^{\prime\prime\prime}$ $x^{\prime}$, $x^{\prime\prime\prime\prime} = A^{\prime\prime\prime\prime}$ $x^{\prime}$, ... $x^{n'} = A^{n'}$ $x^{\prime}$, гдѣ $A^{\prime\prime}$, $A^{\prime\prime\prime}$, $A^{\prime\prime\prime\prime}$ ..... $A^{n'}$ будутъ величины опредѣленныя. Подставивъ эти величины въ первое уравненіе, найдетъ.

$$x^{\prime} = \sqrt[m]{\left(\frac{K}{a^{\prime} + a^{\prime\prime}A^{\prime\prime\, n} + a^{\prime\prime\prime}A^{\prime\prime\prime\, m} + a^{\prime\prime\prime\prime}A^{\prime\prime\prime\prime\, m} + \ldots\ldots + a^{n'}(A^{n'})^m}\right)}$$

откуда выведемъ величины для $x^{\prime\prime}$, $x^{\prime\prime\prime}$, ... $x^{n'}$. Это послѣднее рѣшеніе можетъ быть представлено въ болѣе общемъ видѣ, что̀ предоставляется самому читателю.

II. Пусть будетъ дано n уравненій, съ n неизвѣстными x^{I}, x^{II}, x^{III}, ... $x^{\text{n}'}$, нижеслѣдующаго вида:

$$a^{\text{I}}\, x^{\text{I}}\, x^{\text{II}} + b^{\text{I}}\, x^{\text{I}} + c^{\text{I}}\, x^{\text{II}} + d^{\text{I}} = 0$$
$$a^{\text{II}}\, x^{\text{II}}\, x^{\text{III}} + b^{\text{II}}\, x^{\text{II}} + c^{\text{II}}\, x^{\text{III}} + d^{\text{II}} = 0$$
$$a^{\text{III}}\, x^{\text{III}}\, x^{\text{IV}} + b^{\text{III}}\, x^{\text{III}} + c^{\text{III}}\, x^{\text{IV}} + d^{\text{III}} = 0$$

. . . . . .

$$a^{(\text{n}-1)'}\, x^{(\text{n}-1)'}\, x^{\text{n}'} + b^{(\text{n}-1)}\, x^{(\text{n}-1)'} + c^{(\text{n}-1)'}\, x^{\text{n}'} + d^{(\text{n}-1)'} = 0.$$
$$a^{\text{n}'}\, x^{\text{n}'}\, x' + b^{\text{n}'}\, x^{\text{n}'} + c^{\text{n}'}\, x' + d^{\text{n}'} = 0.$$

Опредѣливъ изъ перваго уравненія x^{II} чрезъ x^{I}, подставляемъ эту величину во второе, изъ котораго потомъ опредѣлимъ x^{III} также посредствомъ x^{I}, и т. д.; такимъ образомъ получимъ наконецъ величину $x^{\text{n}'}$ въ x^{I}, которая будетъ нижеслѣдующаго вида: $x^{\text{n}'} = \frac{Ax' + B}{Cx' + D}$. Подставить это выраженіе въ послѣднее уравненіе, получимъ уравненіе второй степени для x^{I}. Изъ котораго уравненія найдемъ x^{I}, а посредствомъ этой величины опредѣлятся и всѣ прочія неизвѣстныя.

. . . . . .

Ежели корни уравненія даны, то легко составить и самое уравненіе: какимъ образомъ? Какое уравненіе имѣетъ, напримѣръ, корни 1, 3, — 1, — 4? Составить уравненіе, котораго корни были бы: 6, $2 + 3\sqrt{(-1)}$, $2 - 3\sqrt{(-1)}$? — Посему между коэфиціентами уравненія и корнями его есть нѣкоторая зависимость: какая именно? — Ежели три уравненія I. $x + y + z = a$, II. $xy + xz + yz = b$, III. $xyz = c$ или четыре уравненія I. $x + y + z + w = a$, II. $xy + xz + xw + yz + yw + zw = b$, III. $xyz + xyw + xzw + yzw = c$. IV. $xyzw = d$ даны, то въ первомъ случаѣ можно составить уравненіе третьей степени, котораго корни будутъ изображать неизвѣстныя x, y, z; а во второмъ слу-

чаѣ получится уравненіе четвертой степени, котораго корни будутъ равны неизвѣстнымъ x, y, z, w: какимъ образомъ таковыя уравненія составляются? — Ежели m корней уравненія n-й степени извѣстны, то опредѣленіе прочихъ требуетъ только рѣшенія уравненія $(n-m)$-й степени: какимъ образомъ это послѣднее уравненіе составляется? — Ежели степень уравненія будетъ нечетная, то въ такомъ случаѣ одинъ корень, по-крайней-мѣрѣ, долженъ былъ возможнымъ: почему? — Ежели $h + k\sqrt{(-1)}$ есть мнимый корень какого-нибудь уравненія, то необходимо $h - k\sqrt{(-1)}$ будетъ также корнемъ его: какъ это доказать? — Предполагая (что впрочемъ, очень строго доказать можно), что всѣ мнимыя величины приводятся къ виду $h + k\sqrt{(-1)}$; спрашивается: сколько мнимыхъ и сколько возможныхъ корней уравненія n-й степени имѣть можетъ, въ случаѣ n четнаго и въ случаѣ n нечетнаго? — Ежели, разрѣшая уравненіе по Кардановой формулѣ, получимъ выраженіе, представляющееся въ мнимомъ видѣ, то дѣйствительно ли уравненіе не будетъ имѣть возможнаго корня? Или это только показываетъ, что видъ, который хотѣли дать корню, невозможенъ?

РѢШЕНІЕ УРАВНЕНІЙ ПО ПРИБЛИЖЕНІЮ.

1. Уравненія съ одною неизвѣстною величиною.

Первый способъ.

Пусть $X = 0$ будетъ уравненіе, содержащее неизвѣстную величину x. Далѣе пусть w будетъ приближенная величина

для x, найденная чрезъ постановленіе, и разнствующая отъ истинной величины x менѣе, нежели на единицу. Посему, подставляя $w + h$ вмѣсто x въ уравненіе $X = 0$ и опредѣливъ h какъ можно точнѣе, необходимо эта величина h будетъ менѣе единицы. Сохраняя при рѣшеніи только первую степень h, и опустивъ члены, содержащіе высшіе степени h, которыхъ численныя величины весьма малы, очевидно, что уравненіе $X = 0$ будетъ вида: $A + Bh = 0$, гдѣ A и B будутъ извѣстныя величины. Изъ этого послѣдняго уравненія получится h; слѣдовательно найдется приближенная величина x, ибо имѣемъ $x = w + h$. Поступивъ съ этою найденною величиною для x точно такимъ же образомъ, какъ съ величиною w, и повтаряя дѣйствіе это нѣсколько разъ, будемъ болѣе и болѣе приближаться къ истинной величинѣ неизвѣстной x.

Прилагая это правило къ общему уравненію:
$x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + cx^{m-3} + \ldots + hx^2 + kx + l = 0$ получимъ нижеслѣдующую общую формулу для приближенной величины x.

$$x = \frac{(m-1)\ w^m + (m-2)\ aw^{m-1} + (m-3)\ bw^{m-2} + \ldots + 1\ hw^2 - l}{mw^{m-1} + (m-1)\ aw^{m-2} + (m-2)\ bw^{m-3} + \ldots + 2hw + k}$$

Слѣдовательно для уравненія 3-й степени $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ будетъ:

$$x = \frac{2w^3 + aw^2 - c}{3w^2 + 2aw + b}.$$

Для уравненія 4-й степени $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ будетъ:

$$x = \frac{3w^4 + 2aw^3 + bw^2 - d}{4w^3 + 3aw^2 + 2bw + c}.$$

Для уравненія 5-й степени $x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ будетъ:

$$x = \frac{4w^5 + 3aw^4 + 2bw^3 + cw^2 - c}{5w^4 + 4aw^3 + 3bw^2 + 2cw + d},$$

и т. д.

Примѣры.

1) У. $x^3 = 2$.

$w = 1$, $w' = \frac{4}{3}$, $w'' = \frac{91}{72}$, $w''' = \frac{2253638}{1788696}$, и т. д. (*).

2) У. $x^3 = 30$.

$w = 3$, $w' = \frac{28}{9}$, $w'' = \frac{65774}{21168}$, и т. д.

3) У. $x^3 - 12x^2 + 57x - 94 = 0$.

$w = 3$, $w' = \frac{10}{3}$, $w'' = \frac{938}{279}$, и т. д.

4) У. $x^3 - 15x^2 + 72x - 109 = 0$.

$w = 5$, $w' = \frac{16}{3}$, $w'' = \frac{385}{72}$, и т. д.

5) У. $x^3 - 13x^2 + 38x + 17 = 0$.

$w = 8$, $w' = \frac{175}{22}$, $w'' = \frac{1778984}{223674}$, и т. д.

6) У. $x^3 + 2x^2 + 3x - 52 = 0$.

$w = 3$, $w' = \frac{62}{21}$, $w'' = \frac{1119676}{379323}$, и т. д.

7) У. $x^3 - 12x - 132 = 0$.

$w = 6$, $w' = \frac{47}{8}$, $w'' = \frac{137615}{23436}$, и т. д.

8) У. $x^4 - 4x^3 + 18 = 0$.

$w = 2$, $w' = \frac{17}{8}$, $w'' = \frac{137597}{64736}$, и т. д.

(*) w, w', w'', и т. д. суть послѣдовательныя приближенныя величины для x. Въ этихъ примѣрахъ приводится только одинъ корень; для опредѣленія же другихъ возможныхъ корней, если оные существуютъ, должно слѣдовать тѣмъ же самымъ правиламъ.

9) У. $x^4 + 8x^2 + 16x - 440 = 0$.

$w = 4$, $w' = \frac{167}{42}$, $w'' = \frac{4096104771}{1030204056}$ и т. д.

Для дальнѣйшаго вычисленія величины x, можно вообще дробь, найденную для w'', обратить въ десятичную, хотя до 3 цифръ, чтобы облегчить численное опредѣленіе четвертой приближенной величины w'''.

Второй способъ.

Пусть $X = 0$ будетъ уравненіе, содержащее неизвѣстную величину x, и положимъ, что требуется опредѣлить какой-нибудь корень онаго посредствомъ непрерывныхъ дробей; то, по общему правилу, изложенному въ № VIII на страницѣ 105, должно будетъ поступить слѣдующимъ образомъ:

Вмѣсто x подставимъ $a + \frac{1}{x'}$, и тогда уравненіе $X = 0$ обратится въ $X' = 0$, содержащее неизвѣстную x'. Пусть a' и $a' + 1$ будутъ цѣлыя числа, между которыми корень этого уравненія заключается; подставимъ опять въ уравненіе $X' = 0$ величину $a' + \frac{1}{x'}$ вмѣсто x', и уравненіе $X' = 0$ обритится въ $X'' = 0$, содержащее неизвѣстную x''. Если корень этого послѣдняго уравненія заключается между числами a'' и $a'' + 1$, то надлежитъ опять подставить $a'' + \frac{1}{x'}$ вмѣсто x'' и такъ далѣе. Тогда корень x даннаго уравненія выразится посредствомъ непрерывной дроби:

$$x = a + \frac{1}{x'} = a + \cfrac{1}{a' + \cfrac{1}{x''}} = a + \cfrac{1}{a' + \cfrac{1}{a'' + \text{etc.}}}$$

Ежели потомъ опредѣлимъ приближающіяся дроби для этой непрерывной дроби: то получимъ приближенныя величины искомаго корня даннаго уравненія.

Примѣры.

1) $x^3 - 2 = 0$

. . . . . .

$$X = x^3 - 2 = 0.$$

$$x = 1 + \frac{1}{x^{\text{I}}}$$

$$X^{\text{I}} = x^{\text{I}^3} - 3x^{\text{I}^2} - 3x^{\text{I}} - 1 = 0.$$

$$x^{\text{I}} = 3 + \frac{1}{x^{\text{II}}}$$

$$X^{\text{II}} = 10x^{\text{II}^3} - 6x^{\text{II}^2} - 6x^{\text{II}} - 1 = 0.$$

$$x^{\text{II}} = 1 + \frac{1}{x^{\text{III}}}$$

$$X^{\text{III}} = 3x^{\text{III}^3} - 12x^{\text{III}^2} - 24x^{\text{III}} - 10 = 0.$$

$$x^{\text{III}} = 5 + \frac{1}{x^{\text{IV}}}$$

$$X^{\text{IV}} = 55x^{\text{IV}^3} - 81x^{\text{IV}^2} - 33x^{\text{IV}} - 3 = 0.$$

$$x^{\text{IV}} = 1 + \frac{1}{x^{\text{V}}}$$

$$X^{\text{V}} = 62x^{\text{V}^3} - 30x^{\text{V}^2} - 84x^{\text{V}} - 55 = 0$$

$$x^{\text{V}} = 1 + \frac{1}{x^{\text{VI}}}$$

и т. д.

Приближенныя величины: 1, $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{29}{23}$, $\frac{34}{27}$, $\frac{63}{50}$, etc. Истинный корень: 1,25992....

2) $x^3 - 15x^2 + 63x - 50 = 0.$

. . . . . .

$$X = x^3 - 15x^2 + 63x - 50 = 0.$$

$$x = 1 + \frac{1}{x^{\text{I}}}$$

$$X^{\text{I}} = x^{\text{I}^3} - 36x^{\text{I}^2} + 12x^{\text{I}} - 1 = 0.$$

$$x^{\text{I}} = 35 + \frac{1}{x^{\text{II}}}$$

$$X^{II} = 806x^{II^3} - 1167x^{II^2} - 69x^{II} - 1 = 0.$$

$$x^{II} = 1 + \frac{1}{x^{III}}$$

$$X^{III} = 431x^{III^3} - 15x^{III^2} - 1251x^{III} - 806 = 0$$

$$x^{III} = 1 + \frac{1}{x^{IV}}$$

и т. д.

Приближенныя величины: 1, $\frac{36}{33}$, $\frac{37}{36}$, $\frac{73}{71}$, etc. Истинный корень: 1,02803....

3) $x^3 - 12x^2 + 45x - 53 = 0$

. . . . . .

$$X = x^3 - 12x^2 + 45x - 53 = 0.$$

$$x = 5 + \frac{1}{x^{I}}$$

$$X^{I} = 3x^{I^3} - 3x^{I} - 1 = 0$$

$$x^{I} = 1 + \frac{1}{x^{II}}$$

$$X^{II} = x^{II^3} - 6x^{II^2} - 9x^{II} - 3 = 0.$$

$$x^{II} = 7 + \frac{1}{x^{III}}$$

$$X^{III} = 17x^{III^3} - 54x^{III^2} - 15x^{III} - 1 = 0$$

$$x^{III} = 3 + \frac{1}{x^{IV}}$$

$$X^{IV} = 73x^{IV^3} - 120x^{IV^2} - 99x^{IV} - 17 = 0$$

$$x^{IV} = 2 + \frac{1}{x^{V}}$$

$$X^{V} = 111x^{V^3} - 297x^{V^2} - 318x^{V} - 73 = 0$$

$$x^{V} = 3 + \frac{1}{x^{VI}}$$

$$X^{vi} = 703x^{vi^3} - 579x^{vi^2} - 702x^{vi} - 111 = 0$$

$$x^{vi} = 1 + \frac{1}{x^{vii}}$$

и т. д.

Приближенныя величины: 5, 6, $\frac{47}{8}$, $\frac{147}{25}$, $\frac{341}{58}$, $\frac{1170}{199}$, $\frac{1511}{257}$, etc. Истинный корень: 5,879385....

4) $x^3 - 12x^2 + 57x - 94 = 0$

. . . . . .

$$X = x^3 - 12x^2 + 57x - 94 = 0$$

$$x = 3 + \frac{1}{x^{i}}$$

$$X^{i} = 4x^{i^3} - 12x^{i^2} + 3x^{i} - 1 = 0$$

$$x^{i} = 3 - \frac{1}{x^{ii}}$$

$$X^{ii} = 8x^{ii^3} - 39x^{ii^2} + 24x^{ii} - 4 = 0$$

$$x^{ii} = 4 + \frac{1}{x^{iii}}$$

$$X^{iii} = 20x^{iii^3} - 96x^{iii^2} - 57x^{iii} - 8 = 0$$

$$x^{iii} = 5 + \frac{1}{x^{iv}}$$

$$X^{iv} = 193x^{iv^3} - 483x^{iv^2} - 204x^{iv} - 200 = 0$$

$$x^{iv} = 3 - \frac{1}{x^{v}}$$

и т. д.

Приближенныя величины: 3, $\frac{10}{3}$, $\frac{37}{11}$, $\frac{195}{58}$, $\frac{622}{185}$, etc. Истинный корень: 3,36216....

5) $x^3 - 12x - 28 = 0$

. . . . . .

$$X = x^3 - 12x - 28 = 0$$

$$x = 4 + \frac{1}{x^{i}}$$

$$X^{\text{I}} = 12x^{\text{I}\,3} - 36x^{\text{I}\,2} - 12x^{\text{I}} - 1 = 0.$$

$$x^{\text{I}} = 3 + \frac{1}{x^{\text{II}}}.$$

$$X^{\text{II}} = 37x^{\text{II}\,3} - 96x^{\text{II}\,2} - 72x^{\text{II}} - 12 = 0$$

$$x^{\text{II}} = 3 + \frac{1}{x^{\text{III}}}$$

$$X^{\text{III}} = 93x^{\text{III}\,3} - 351x^{\text{III}\,2} - 237x^{\text{III}} - 37 = 0$$

$$x^{\text{III}} = 4 + \frac{1}{x^{\text{IV}}}$$

$$X^{\text{IV}} = 649x^{\text{IV}\,3} - 1419x^{\text{IV}\,2} - 765x^{\text{IV}} - 93 = 0$$

$$x^{\text{IV}} = 3 + \frac{1}{x^{\text{V}}}$$

и т. д.

Приближенныя величины 4, $\frac{13}{3}$, $\frac{43}{10}$, $\frac{185}{43}$, $\frac{598}{139}$, etc. Истинный корень: 4,30213.....

При употребленіи этого способа могутъ встрѣтиться нѣкоторыя сокращенія и облегченія въ выкладкахъ, упомянуть о которыхъ въ этомъ сочиненіи считаю излишнимъ. Способъ этотъ можно также весьма выгодно соединить съ первымъ, опредѣливъ предварительно величину корня, довольно-приближенную.

---

2. Уравненія со многими неизвѣстными.

Пусть $X = 0$ и $X_1 = 0$ будутъ два уравненія, содержащія неизвѣстныя величины x и y. Предполагается, что приближенныя величины для x и y уже извѣстны, и требуется только опредѣлить оныя точнѣе.

I. Пусть $x = a$ и $y = b$ будутъ эти приближенныя величины. Подставимъ $a + h$ вмѣсто x и $b + k$ вмѣсто y въ уровненія $X = 0$, $X_1 = 0$; при разложеніи же выраженій X и X_1

опускаются члены, содержащіе произведенія величинъ h и k, а также и степени этихъ количествъ, начиная со второй, такъ-что уравненія $X = 0$ и $X_1 = 0$ обратятся въ два другія слѣдующаго вида:

$$A + Bh + Ck = 0$$
$$A' + B'h + C'k = 0$$

гдѣ A, B, C; A', B', C', будутъ величины опредѣленныя. Выводя изъ этихъ послѣднихъ двухъ уравненій неизвѣстныя h и k, получимъ поправки для величинъ a и b, а слѣдовательно и приближенныя величины для x и y, а именно $x = a + h$ и $y = b + k$; величины эти мѣнѣе разнятся отъ истинной, чѣмъ прежнія a и b.

II. Поступая съ величинами $a + h$ и $b + k$ точно такъ же, какъ съ a и b, опять получимъ надлежащія поправки, а слѣдовательно двѣ новыя приближенныя величины для x и y, которыя будутъ еще точнѣе, нежели найденныя выше.

III. Такимъ образомъ продолжаемъ дѣйствіе до тѣхъ поръ, пока не достигнемъ надлежащей степени приближенія. При подобныхъ вычисленіяхъ логариѳмы съ пользою могутъ быть употреблены.

Примѣръ:

Положимъ, что даны два уравненія:

$$x^7 - 5x^2y^4 + 1506 = 0.$$
$$y^5 - 3x^4y - 103 = 0.$$

Величины $x = 2$, $y = 3$ почти удовлетворяютъ этимъ уравненіямъ.

Первая поправка.

$$14 - 1172h - 2160k = 0.$$
$$-4 - 288h + 357k = 0.$$

откуда: $h = -0{,}0035$, $k = +0{,}0084$

слѣдовательно: $x = 1{,}9965$, $y = 3{,}0084$

Вторая поправка.

$$-0{,}486 - 1189{,}170h - 2170{,}576k = 0$$
$$0{,}026 - 287{,}293h + 361{,}890k = 0$$

откуда: $h = -0{,}000113$, $k = -0{,}000161$

слѣдовательно: $x = 1{,}996387$, $y = 3{,}008239$.

Послѣднія приближенныя величины для x и y справедливы до шестой десятичной цифры, и потому этихъ поправокъ достаточно, если ограничиваемся таковою степенью приближенія.

. . . . . .

Способъ этотъ въ общемъ случаѣ можно изобразить слѣдующимъ образомъ: Пусть дано n уравненій $X = 0$, $X_{\text{I}} = 0$, $X_{\text{II}} = 0$, etc. съ n неизвѣстными x, y, z, etc. Далѣе пусть a, b, c, etc. величины для x, y, z, etc. разнствующія отъ настоящихъ величиною, меньшею единицы. И такъ, подставляя $a + h$, $b + k$, $c + l$, etc. вмѣсто x, y, z, etc. въ данныя уравненія, и удерживая при разложеніи только первыя степени количествъ h, k, l, etc. пулучимъ n уравненій первой степени съ n неизвѣстными h, k, l, etc. вида:

$$A + Bh + Ck + Dl + \text{etc.} = 0.$$

Выводя отсюда поправки h, k, l, etc. найдемъ, слѣдовательно, и первыя приближенныя величины для x, y, z, etc. а именно: $x = a + h$, $y = b + k$, $z = c + l$, etc. Съ этими величинами поступаемъ точно такъ же, какъ съ a, b, c. etc. и продолжаемъ точно такимъ же образомъ опредѣлять слѣдующія поправки до тѣхъ поръ, пока получимъ довольно приближенныя величины для x, y, z, etc.

Сущность этаго способа, состоящаго въ постепенномъ приближеніи къ истиннымъ величинамъ неизвѣстныхъ, служитъ основаніемъ многихъ другихъ способовъ приближенія. Польза, съ особенности же простота послѣдняго способа, побудили помѣстить его во всѣхъ учебныхъ курсахъ Алгебры, хотя во всей обширности и съ возможными сокращеніями способъ этотъ только въ анализѣ объясненъ быть можетъ.

ОТДѢЛЕНІЕ ТРЕТІЕ,

СОДЕРЖАЩЕЕ

ПРАКТИЧЕСКІЯ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПРИЛОЖЕНІЯ ПРЕДЪИДУЩИХЪ ПРАВИЛЪ.

ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНІЙ ПЕРВОЙ СТЕПЕНИ СЪ ОДНОЮ НЕИЗВѢСТНОЮ ВЕЛИЧИНОЮ.

1. Два капиталиста, сравнивая взаимное состояніе, нашли, что одинъ изъ нихъ вдвое богаче другаго, и что сумма ихъ капиталовъ составляетъ 38700 рублей. Спрашивается: какъ великъ былъ капиталъ каждаго?

Отв. Капиталъ перваго 12900, а втораго 25800 рублей.

2. Раздѣлить 2500 рублей между двумя братьями такъ, чтобы одинъ изъ нихъ получилъ столько разъ по 4 рубля, сколько разъ другой получитъ по 1-му рублю. Спрашивается: сколько долженъ получить каждый?

Отв. Одинъ получитъ 500, а другой 2000 рублей.

3. Нѣкто имѣетъ 2640 рублей, въ числѣ которыхъ у него въ $4\frac{1}{2}$ раза менѣе звонкой монеты, чѣмъ ассигнацій. Спрашивается: сколько у него денегъ того и другаго рода?

Отв. 480 рублей звонкою монетою и 2160 рублей ассигнаціями.

4. Раздѣлить число 237 на такія двѣ части, чтобы одна содержалась въ другой $1\frac{1}{4}$ раза.

Отв. $105\frac{1}{3}$ и $131\frac{2}{3}$.

Въ чемъ эти четыре задачи сходствуютъ между собою?

5. Найти такіе два числа, чтобы одно было въ m разъ болѣе другаго, и чтобы сумма ихъ была $= a$.

Отв. $\frac{a}{m+1}$ и $\frac{ma}{m+1}$.

6. Раздѣлить 1200 рублей между двумя особами A и B такъ, чтобы часть, которую получитъ A, содержалась къ части B, какъ 2 къ 7. Спрашивается: сколько получитъ каждый?

Отв. A получитъ $266\frac{2}{3}$, а B $933\frac{1}{3}$ рублей.

Какимъ образомъ представить эту задачу въ болѣе общемъ видѣ?

7. Раздѣлить число a на такія двѣ части, чтобы первая содержалась ко второй какъ m къ n.

Отв. Одна часть будетъ $\frac{ma}{m+n}$, а другая $\frac{na}{m+n}$, или, что одно и тоже, одна будетъ $\frac{m}{m+n} \cdot a$, а другая $\frac{n}{m+n} \cdot a$.

Въ чемъ задача эта сходствуетъ съ 5-ю, и какимъ образомъ приводится одна къ другой?

8. Спрашивается: сколько у меня денегъ, если четвертая и пятая части оныхъ, вмѣстѣ взятыя, составляютъ 2 рубля 79 копеекъ?

Отв. 6 рублей 20 копеекъ.

9. Двое встрѣтили барышника, продавшаго лошадь, и рѣшились купить ее. Сторговавшись съ продавцемъ нашлось, что одинъ изъ покупателей въ состояніи заплатить только

пятую, а другой седьмую часть условленной цѣны, что составило вмѣстѣ 48 рублей, которые они и дали барышнику въ задатокъ. Спрашивается: цѣна лошади.

Отв. 140 рублей.

Эта задача совершенно сходствуетъ съ предъидущею. — Какимъ образомъ подвести эти задачи подъ общій видъ?

10. Найти такое число, что если раздѣлимъ его на m и потомъ на n, и сложимъ частныя, то получимъ сумму $= a$?

Отв. $\frac{mna}{m+n}$.

11. Раздѣлить число 46 на такія двѣ части, чтобы сумма частныхъ, происшедшихъ отъ раздѣленія первой части на 7, а второй на 3, составила 10.

Отв. 28 и 18.

12. Раздѣлить число a на такія двѣ части, чтобы сумма частныхъ, происшедшихъ отъ раздѣленія первой части на m, а второй на n, была $= b$?

Отв. $\frac{m\ (nb - a)}{n - m}$, $\frac{n\ (mb - a)}{m - n}$.

13. Въ одномъ обществѣ, состоявшемъ изъ офицеровъ, купцовъ и студентовъ, было 266 человѣкъ; въ томъ числѣ купцовъ было вчетверо, а офицеровъ вдвое болѣе нежели студентовъ. Спрашивается: сколько человѣкъ было изъ каждаго сословія?

Отв. 38 студентовъ, 152 купца и 76 офицеровъ.

14. Въ одной крѣпости находится гарнизона 2600 человѣкъ; въ томъ числѣ пѣхоты въ 9 разъ, а артиллеріи въ 3 раза болѣе, нежели кавалеріи. Спрашивается: сколько было человѣкъ каждаго рода службы?

Отв. 200 кавалеристовъ, 600 артиллеристовъ и 1800 человѣкъ пѣхоты.

15. Одинъ путешественникъ говорилъ, что въ продолженіе всѣхъ своихъ путешествій онъ проѣхалъ 30400 верстъ; въ томъ числѣ водою $3\frac{1}{2}$ раза болѣе, нежели верхомъ, и въ $2\frac{1}{3}$ раза болѣе прошелъ пѣшкомъ, нежели проѣхалъ водою. Спрашивается: сколько верстъ сдѣлалъ онъ верхомъ, водою и пѣшкомъ?

Отв. 2400 верстъ верхомъ, 8400 водою и 19600 пѣшкомъ.

Въ чемъ 13-я, 14-я и 15-я задачи сходствуютъ между собою?

16. Раздѣлить число a на такія три части, чтобы вторая была въ m, а третья въ n разъ болѣе первой?

Отв. $\frac{a}{1+m+n}$, $\frac{ma}{1+m+n}$, $\frac{na}{1+m+n}$.

17. Найти такое число, что если помножимъ оное на 4 и потомъ это произведеніе раздѣлимъ на 3, то частное будетъ $= 24$? — *Отв.* 18.

18. Поле въ 864 квадратныя сажени должно раздѣлить между тремя крестьянами A, B и C такимъ образомъ, чтобы участокъ крестьянина A относился къ участку B какъ 5 : 11; а участокъ C былъ бы равенъ суммѣ участковъ двухъ первыхъ крестьянъ. Спрашивается: какъ великъ участокъ каждаго изъ нихъ?

Отв. A 135, B 297, C 432 квадратн. сажень.

19. Раздѣлить 1170 рублей между тремя особами A, B и C соразмѣрно ихъ лѣтамъ. Между-тѣмъ извѣстно, что B одною третью старѣе A, а C вдвое старѣе A. Спрашивается: сколько каждый получитъ?

Отв. A 270, B 360, C 540 рублей.

20. Три города A, B и C должны, къ имѣющей быть войнѣ, выставить войска 594 человѣка, соразмѣрно ихъ народонаселенію. Если число жителей въ A относится къ числу жителей въ B какъ 3 къ 5, а число жителей въ B къ числу

жителей въ C какъ 8 къ 7, то спрашивается: сколько человѣкъ каждый городъ долженъ выставить?

Отв. A 144, B 240, C 210 человѣкъ.

21. Капиталъ 21000 рублей должно раздѣлить между четырьмя кредиторами A, B, C и D, соразмѣрно ихъ требованіямъ. Требованія же ихъ находятся въ слѣдующемъ отношеніи: A къ B какъ 2 къ 3, B къ C какъ 4 къ 5, и C къ D какъ 6 къ 7. Спрашивается: сколько каждый кредиторъ долженъ получить?

Отв. A 3200, B 4800, C 6000, D 7000 рублей.

22. Раздѣлить число a на такія три части, чтобы онѣ относились: первая ко второй какъ m къ n, а вторая къ третьей какъ p къ q?

Отв. Эти три части суть: $\frac{mpa}{mp+np+nq}$, $\frac{npa}{mp+np+nq}$, $\frac{nqa}{mp+np+nq}$.

23. Третью часть моихъ доходовъ, сказалъ нѣкто, употребляю я на пищу и на наемъ квартиры, восьмую часть на бѣлье и платье, десятую на мелочные расходы и такимъ образомъ сберегаю всякій годъ 318 рублей. Спрашивается: какъ великъ годовой доходъ этой особы?

Отв. 720 рублей.

24. Одинъ купецъ, посредствомъ выгоднаго торговаго оборота, получилъ на свой капиталъ 15 процентовъ, и такимъ образомъ увеличилъ его до 15571 рубля. Спрашивается: какъ великъ былъ первоначальный капиталъ его?

Отв. 13540 рублей.

25. Капиталъ отданъ въ ростъ по $4\frac{1}{2}$ процента въ годъ; по прошествіи года капиталъ и проценты составили 13167 рублей. Спрашивается: какъ великъ былъ капиталъ?

Отв. 12600 рублей.

26. Доходъ съ одного имѣнія, по причинѣ нѣкоторыхъ улучшеній, увеличился 8-ю процентами противъ доходовъ прошлыхъ годовъ, и составилъ 1890 рублей. Спрашивается доходъ предъидущихъ годовъ.

Отв. 1750 рублей.

27. Фунтъ нѣкотораго вещества продается по 90 копеекъ, и, продавая по этой цѣнѣ, купецъ получаетъ по $12\frac{1}{2}$ процентовъ. Спрашивается: что ему самому стоитъ пудъ?

Отв. 32 рубля.

28. Найти капиталъ, который, будучи сложенъ съ пятилѣтними простыми процентами, считая по 4 процента въ годъ, составляетъ 8208 рублей?

Отв. 6840 рублей.

29. Одинъ игрокъ проигралъ въ первую игру шестую часть, а во вторую десятую часть бывшихъ при немъ денегъ; въ третью же онъ выигралъ третью часть оныхъ. По окончаніи игры нашлось, что онъ выигралъ 30 рублей. Спрашивается: сколько онъ имѣлъ денегъ передъ игрою?

Отв. 450 рублей.

30. Найти два числа, которыхъ бы сумма равнялась 96, и одно изъ нихъ было бы 16-ю болѣе другаго?

Отв. 40 и 56.

31. По окончаніи выгоднаго торга должно раздѣлить между купцами барышъ, составляющій 1200 рублей такъ, чтобы одинъ изъ нихъ получилъ вдвое менѣе другаго, и, сверхъ того, за производство оборота 50 рублей лишнихъ. Спрашивается: сколько каждый долженъ получить?

Отв. Одинъ получитъ $766\frac{2}{3}$, а другой $433\frac{1}{3}$ рублей.

32. Раздѣлить 1520 рублей между тремя особами A, B и C такъ, чтобы B получилъ 100 рублями болѣе нежели A,

а *C* 270 рублями болѣе нежели *B*. Спрашивается: сколько слѣдуетъ получить каждому?

Отв. *A* 350, *B* 450, *C* 720 рублей.

33. Вдова, по духовному завѣщанію супруга, должна раздѣлить съ двумя сыновьями и тремя дочерьми капиталъ 7500 рублей такъ, чтобы каждый сынъ получилъ вдвое болѣе каждой дочери; мать же должна получить столько, сколько всѣ ея дѣти вмѣстѣ и, сверхъ того, еще 500 рублей. Спрашивается: сколько должны получить мать и дѣти?

Отв. Мать 4000, каждый сынъ по 1000 и каждая дочь по 500 рублей.

34. Въ нѣкоторомъ обществѣ находятся 90 особъ; въ немъ 4-мя мужчинами болѣе, нежели женщинъ, и 10-ю дѣтьми болѣе, нежели взрослыхъ. Спрашивается: сколько въ этомъ обществѣ мужчинъ, женщинъ и дѣтей?

Отв. Мужчинъ было 22, женщинъ 18, и дѣтей 50.

35. Раздѣлить лѣсъ въ 8000 квадратныхъ футовъ между тремя крестьянами *A*, *B* и *C* такъ, чтобы *B* получилъ 276 квадратными футами менѣе нежели *A*, и *C* 1112 квадратными футами болѣе нежели *B*. Спрашивается: сколько каждый изъ нихъ долженъ получить?

Отв. *A* 2480, *B* 2204, *C* 3316 квадратныхъ футовъ.

36. Одинъ отецъ подарилъ своимъ пяти сыновьямъ 1000 рублей, которые они должны раздѣлить между собою такъ, чтобы старшій изъ нихъ получилъ 20-ю рублями болѣе нежели второй; второй 20-ю рублями болѣе нежели третій, и т. д. Спрашивается: сколько долженъ получить самый младшій изъ нихъ?

Отв. 160 рублей.

37. Нѣкоторую сумму должно раздѣлить между тремя особами *A*, *B* и *C* слѣдующимъ образомъ: *A* долженъ получить 3000 рублями менѣе половины всей суммы, *B* 1000 рублями

менѣе третьей части, а *C* 800 рублями болѣе четвертой части всей суммы. Спрашивается: какъ велика сумма и сколько каждый долженъ получить?

Отв. Вся сумма составляетъ 38400 рублей; *A* получитъ 16200, *B* 11800, а *C* 10400 рублей.

38. Нѣкто, умирая, завѣщалъ въ своей духовной: женѣ половину своего капитала, каждому изъ двухъ сыновей по шестой части, вѣрному слугѣ двѣнадцатую часть, а остающіеся сверхъ сего 6000 рублей — бѣднымъ. Спрашивается: какъ великъ былъ оставленный имъ капиталъ?

Отв. 72000 рублей.

39. Лугъ, въ 2580 квадратныхъ футовъ, должно раздѣлить между тремя помѣщиками *A*, *B* и *C*; участокъ помѣщика *A* долженъ содержаться къ участку помѣщика *B* какъ 6 къ 11; помѣщикъ же *C* долженъ получить 300 квадратными футами болѣе, чѣмъ *A* и *B* вмѣстѣ. Спрашивается: какъ великъ участокъ каждаго?

Отв. *A* 450, *B* 825, *C* 1575 квадратн. футовъ.

40. Отецъ оставляетъ послѣ смерти четырехъ сыновей *A*, *B*, *C* и *D*, и капиталъ въ 2520 рублей, который должно раздѣлить между ними слѣдующимъ образомъ: *C* долженъ получить 360 рублей, *B* столько, сколько *C* и *D* вмѣстѣ, а *A* безъ 1000 рублей вдвое болѣе, чѣмъ *B*. Спрашивается: сколько должны получить *A*, *B* и *D*?

Отв. *A* 760, *B* 880, *D* 520 рублей.

41. Пять наслѣдниковъ должны раздѣлить между собою капиталъ въ 5600 рублей слѣдующимъ образомъ: *B* долженъ получить вдвое болѣе, чѣмъ *A* и, сверхъ сего, 200 рублей, *C* втрое болѣе чѣмъ *A*, за вычетомъ 400 рублей, *D* половину того, что получили *B* и *C* вмѣстѣ и, сверхъ сего, 150 рублей, *E* четвертую часть того, что получили прочіе

четыре и еще 475 рублей. Спрашивается: сколько долженъ получить каждый?

Отв. *A* 500, *B* 1200, *C* 1100, *D* 1300, *E* 1500 рублей

42. Пять игроковъ проиграли вмѣстѣ 40 рублей 80 копеекъ; проигрышъ игрока *B* 50-ю копейками превышаетъ утроенный проигрышъ игрока *A*, проигрышъ игрока *C* 2 рублями менѣе удвоеннаго проигрыша игрока *B*, *D* проигралъ 20-ю копейками менѣе, чѣмъ *A* и *B* вмѣстѣ, а *E* 3-мя рублями менѣе, чѣмъ удвоенный проигрышъ игрока *B*. Спрашивается: сколько проигралъ каждый?

Отв. *A* 2 р. 15 к.; *B* 6 р. 95 к.; *C* 11 р. 90 к.; *D* 8 р. 90 к.; *E* 10 р. 90 к.

43. Одинъ купецъ продалъ извѣстнаго товара, вѣсившаго 40 фунтовъ, нѣкоторую часть, и у него осталось 8-ю фунтами болѣе противъ проданнаго. Спрашивается: сколько фунтовъ онъ продалъ?

Отв. 16 фунтовъ.

44. Изъ 56 рублей я издержалъ нѣсколько, и у меня осталось втрое болѣе противъ издержаннаго мною. Спрашивается: сколько я издержалъ?

Отв. 14 рублей.

45. Двое, *A* и *B*, играютъ въ бильярдъ. *A* до начала игры имѣлъ 42, а *B* 24 рубля. Послѣ нѣсколькихъ партій, съигранныхъ съ перемѣннымъ счастіемъ, оказалось, что *A* имѣетъ въ пять разъ болѣе противъ оставшихся у *B* денегъ. Спрашивается: сколько *A* выигралъ?

Отв. 13 рублей.

46. Гарнизонъ нѣкотораго города состоитъ изъ 1250 солдатъ пѣхотныхъ и кавалерійскихъ. Каждый кавалерійскій солдатъ получаетъ ежемѣсячно по 5, а каждый пѣхотный по 3 рубля жалованья. Спрашивается: какъ велико число кавалеристовъ и пѣхотныхъ солдатъ, если мѣсячное жалованье всего гарнизона составляетъ 4150 рублей?

Отв. 200 кавалерійскихъ и 1050 пѣхотныхъ солдатъ.

47. Каменьщикъ, три подмастерья и четыре работника, работая нѣкоторое время, получили вмѣстѣ 94 рубля 50 копеекъ. Каменьщикъ получалъ ежедневно по 2 рубля, каждый подмастерье по 1 руб. 50 к., а каждый работникъ по 1 рублю. Спрашивается: во сколько дней они заработали эту сумму?

Отв. Въ 9 дней.

48. Нѣкоторый капиталистъ получаетъ съ своего капитала ежегодно 2940 рублей процентовъ; $\frac{4}{5}$ капитала отданы въ ростъ по 4, а $\frac{1}{5}$ по пяти процентовъ на сто. Спрашивается: какъ великъ капиталъ его?

Отв. 70000 рублей.

49. Найти число, имѣющее такое свойство, что если умножимъ его на 7, къ произведенію придадимъ 3, сумму раздѣлимъ на 2 и изъ частнаго вычтемъ 4, то получимъ въ остаткѣ 15? —

Отв. 5.

50. Найти три числа, имѣющія такое свойство, что если второе раздѣлится на первое, то въ частномъ будетъ 2, а въ остаткѣ 1; если же третье раздѣлится на второе, то въ частномъ будетъ 3 и въ остаткѣ 3; а сумма всѣхъ трехъ чиселъ = 70?

Отв. 7, 15, 48.

51. Спрашивается: сколько рублей я имѣю при себѣ, когда, умноживъ число ихъ на 5, изъ этого произведенія вычту 3, остатокъ умножу на 4, приложу къ этому послѣднему произведенію 2, и потомъ отброшу отъ суммы нуль, то получу 23?

Отв. 12 рублей.

52. Найти такое число, что если его умножимъ на 5, изъ произведенія вычтемъ 24, остатокъ раздѣлимъ на

6 и къ частному придадимъ 13, то получимъ искомое число?

Отв. 54.

53. Изъ нѣкотораго мѣста отправленъ посланный, чтобы догнать другаго посланнаго, отправленнаго изъ этого же мѣста 10-ю днями ранѣе. Если первый посланный идетъ въ день по 4 мили, а второй по 9 миль, то по прошествіи сколькихъ дней второй догонитъ перваго?

Отв. Черезъ 8 дней.

54. Изъ нѣкотораго мѣста отправленъ посланный, который идетъ въ день по a миль; n дней спустя отправленъ за нимъ другой посланный, который дѣлаетъ по b миль въ день. Спрашивается: черезъ сколько дней онъ догонитъ перваго посланнаго?

Отв. Черезъ $\frac{na}{b-a}$ дней.

55. Въ какое время второй посланный догонитъ перваго, если второй отправится 12 днями позже перваго и если скорость перваго содержится къ скорости втораго, какъ 3 къ 8?

Отв. въ $7\frac{1}{5}$ дней.

56. Два тѣла движутся по одному и тому же направленію, начиная отъ постоянной точки; второе начинаетъ двигаться n секундами позже перваго и скорость его содержится къ скорости перваго, какъ q къ p. Спрашивается: черезъ сколько времени второе тѣло догонитъ первое?

Отв. Чрезъ $\frac{pn}{q-p}$ секундъ, послѣ начала движенія втораго тѣла.

57. Изъ нѣкотораго мѣста отправленъ курьеръ, который каждые 5 часовъ дѣлаетъ по 7 миль; 8 часовъ послѣ его отъѣзда отправленъ другой курьеръ, который, чтобъ догнать

перваго, долженъ каждые три часа дѣлать по 5 миль. Спрашивается: когда второй догонитъ перваго?

Отв. Чрезъ 42 часа послѣ отъѣзда втораго.

58. Если, при одинаковыхъ условіяхъ съ предъидущею задачею, курьеръ, отправленный прежде, посланъ изъ мѣста, которое лежитъ 8 милями впереди того, изъ котораго отправленъ второй, то чрезъ сколько часовъ въ этомъ случаѣ второй догонитъ перваго?

Отв. Чрезъ 72 часа послѣ отъѣзда втораго.

59. Чтобы придать предъидущей задачѣ болѣе всеобщности, положимъ, что мѣсто отправленія перваго курьера лежитъ a милями впереди; предположимъ, что онъ выѣхалъ b часами прежде втораго курьера; пусть скорость перваго курьера будетъ такова, что онъ въ d часовъ дѣлаетъ c миль, а втораго такова, что онъ въ f часовъ дѣлаетъ e миль. Спрашивается: чрезъ сколько часовъ послѣ отъѣзда втораго курьера этотъ послѣдній догонитъ перваго?

Отв. Чрезъ $\frac{(ad+bc)f}{de-cf}$ часовъ.

60. Теперь спрашивается: чрезъ сколько часовъ второй курьеръ догонитъ перваго, если первый отправленъ изъ мѣста, которое лежитъ a милями не впереди, а назади?

Отв. Чрезъ $\frac{(bc-ad)\,f}{de-cf}$ часовъ.

Что должно сдѣлать, чтобы формула, разрѣшающая предъидущую задачу, приличествовала и этому вопросу?

61. Изъ мѣстечка A выступаетъ полкъ въ мѣстечко B и дѣлаетъ ежедневно по $3\frac{1}{2}$ мили. Изъ мѣстечка B, восемь дней спустя, выступаетъ другой полкъ въ A и дѣлаетъ ежедневно по $5\frac{1}{6}$ миль. Спрашивается: въ который день послѣ выступленія перваго встрѣтятся эти два полка, предполагая разстояніе между мѣстечками A и $B = 80$ милямъ?

Отв. Въ 14-й день.

Еслибъ этотъ послѣдній вопросъ не хотѣли рѣшать отдѣльно, то какія значенія слѣдовало бы приписать величинамъ, a, b, c, d, e, f въ 59-й задачѣ, чтобы формула, при рѣшеніи ея выведенная, приличествовала настоящей частной задачѣ?

62. Два тѣла двигаются по прямому направленію такъ, что одно изъ нихъ идетъ на встрѣчу другому; одно тѣло пробѣгаетъ въ каждую секунду c, а другое C футовъ. Точки, отъ которыхъ тѣла начали двигаться въ одно и то же время, находятся одна отъ другой на разстояніи d футовъ. Спрашивается: чрезъ сколько времени тѣла эти столкнутся?

Отв. Чрезъ $\frac{d}{C+c}$ секундъ.

63. Чрезъ сколько времени столкнутся эти же два тѣла, если то, которое въ каждую секунду пробѣгаетъ C футовъ, двигается въ одну сторону съ другимъ тѣломъ?

Отв. Чрезъ $\frac{d}{C-c}$ секундъ.

Всегда ли эта послѣдняя задача возможна, и что̀ требуется, чтобы она была возможна? — Что̀ означаетъ выраженіе $\frac{d}{C-c}$, когда $C = c$, или когда $C < c$?

64. Непріятельскій корпусъ выступилъ изъ извѣстнаго мѣста за два дня передъ симъ, и дѣлаетъ ежедневно по $4\frac{1}{2}$ мили. Изъ того же самаго мѣста требуется догнать этотъ корпусъ въ 6 дней. Спрашивается: сколько миль въ день долженъ дѣлать, на сей конецъ, корпусъ, отправленный въ погоню?

Отв. 6 миль.

65. Два тѣла двигаются другъ за другомъ по одному и тому же направленію; первое тѣло начало двигаться t единицами времени (напр. секундами) прежде втораго, и находи-

лось такимъ образомъ d единицами пространства (наприм. футами) впереди втораго, до начала движенія этого втораго тѣла; первое тѣло въ каждую единицу времени пробѣгаетъ c, а второе C единицъ пространства. Спрашивается: по прошествіи сколькихъ единицъ времени тѣла эти столкнутся?

Отв. По прошествіи $\frac{d+ct}{C-c}$ единицъ времени.

66. По прошествіи сколькихъ единицъ времени столкнутся тѣ же тѣла, если они, вмѣсто того, чтобы двигаться одно за другимъ, будутъ двигаться другъ другу на встрѣчу, не перемѣняя, впрочемъ, прочихъ условій предъидущей задачи?

Отв. По прошествіи $\frac{d-ct}{C+c}$ единицъ времени.

Какимъ образомъ вывести эту формулу изъ выраженія, найденнаго въ предъидущей задачѣ?

67. Въ полдень минутная стрѣлка покрываетъ часовую; когда и сколько разъ въ продолженіе слѣдующихъ 12 часовъ стрѣлки будутъ опять вмѣстѣ?

Отв. Стрѣлки будутъ 11 разъ вмѣстѣ, а именно въ $5\frac{5}{11}$ минутъ втораго часа, въ $10\frac{10}{11}$ минутъ третьяго, въ $16\frac{4}{11}$ минутъ четвертаго и т. д.; т. е. каждый разъ $5\frac{5}{11}$ минутами позже, чѣмъ въ предъидущемъ часѣ.

68. Два тѣла двигаются по окружности круга, имѣющей p футовъ длины, одно за другимъ. До начала движенія длина дуги между тѣлами имѣетъ d футовъ длины; первое тѣло пробѣгаетъ c, а второе C футовъ въ одну секунду. Спрашивается: когда тѣла эти сойдутся въ первый разъ, во второй, въ третій и т. д., предполагая, что они не препятствуютъ другъ другу въ движеніи?

Отв. По прошествіи $\frac{d}{C-c}$, $\frac{p+d}{C-c}$, $\frac{2p+d}{C-c}$, $\frac{3p+d}{C-c}$, и т. д. секундъ.

69. По прошествіи сколькихъ секундъ тѣла будутъ сходиться, если первое тѣло начнетъ двигаться t секундами прежде втораго?

Отв. По прошествіи $\frac{d+ct}{C-c}$, $\frac{p+d+ct}{C-c}$, $\frac{2p+d+ct}{C-c}$, $\frac{3p+d+ct}{C-c}$, и т. д. секундъ.

70. По прошествіи сколькихъ секундъ тѣла будутъ сходиться, если первое тѣло начнетъ двигаться t секундами позже втораго?

Отв. По прошествіи $\frac{d-ct}{C-c}$, $\frac{p+d-ct}{C-c}$, $\frac{2p+d-ct}{C-c}$, и т. д. секундъ.

71. Но когда тѣла будутъ сходиться, если первое, вмѣсто того, чтобы двигаться въ одну сторону со вторымъ, будетъ двигаться на встрѣчу этому второму тѣлу и начнетъ свое движеніе t секундами прежде?

Отв. По прошествіи $\frac{d-ct}{C+c}$, $\frac{p+d-ct}{C+c}$, $\frac{2p+d-ct}{C+c}$, и т. д. секундъ.

72. Когда тѣла будутъ сходиться, если первое, двигаясь, какъ въ предъидущей задачѣ, на встрѣчу второму, начнетъ свое движеніе t секундами позже втораго?

Отв. По прошествіи $\frac{d+ct}{C-c}$, $\frac{p+d+ct}{C-c}$, $\frac{p+d+ct}{C-c}$, и т. д. секундъ.

Отчего происходитъ только измѣненіе знаковъ въ формулахъ, разрѣшающихъ эти пять задачъ, сходствующихъ между собою? — Можно ли эти выраженія вывести одно изъ другаго, принимая въ разсужденіе стороны, въ которыя тѣла движутся? — Какое значеніе примутъ формулы въ 68-й, 69-й и 70-й задачахъ, если будетъ $C = c$? если будетъ $C < c$?

. . . . . .

Что называется сложнымъ содержаніемъ? Свойства онаго? — Сложное содержаніе двухъ величинъ можетъ быть составлено изъ двухъ, трехъ и болѣе простыхъ содержаній. Эти содержанія и приложеніе ихъ чрезвычайно важны въ наукѣ о величинахъ.

. . . . . .

73. Изъ бассейна, чрезъ имѣющіяся два отверстія, различныхъ діаметровъ, вытекаетъ вода съ различными скоростями. Извѣстно, что площади сѣченія отверстій относятся между собою какъ 5 къ 13, а скорости, вытекающей изъ этихъ отверстій воды какъ 8 къ 7; сверхъ того, знаемъ, что въ извѣстное время изъ одного отверстія вытекло 561 кубическихъ футовъ воды болѣе, нежели изъ другаго. Спрашивается: сколько въ продолженіе этого времени вытекло воды изъ каждаго отверстія?

Отв. Изъ одного 440, а изъ другаго 1001 кубическихъ футовъ.

74. Собака гонится за зайцемъ. Заяцъ успѣлъ сдѣлать 50 скачковъ прежде, чѣмъ собака побѣжала за нимъ, и это составляетъ первоначальное разстояніе между ними. — Заяцъ дѣлаетъ 6 скачковъ въ то же время, въ которое собака дѣлаетъ 5 скачковъ; а по величинѣ: 9 заячьихъ скачковъ можно считать равными 7 собачьимъ скачкамъ. Спрашивается: сколько скачковъ успѣетъ сдѣлать заяцъ, пока собака догонитъ его?

Отв. 700 скачковъ.

75. Два бомбардира бросаютъ бомбы съ одной батареи. Первый успѣлъ уже сдѣлать 36 выстрѣловъ, когда второй началъ, и дѣлаетъ 8 выстрѣловъ въ то же время, въ которое второй дѣлаетъ 7 выстрѣловъ; за то второй бомбардиръ на 3 выстрѣла употребляетъ столько же пороха, сколько первый на 4 выстрѣла. Спрашивается: сколько выстрѣ-

ловъ долженъ сдѣлать второй бомбардиръ, чтобы количество пороха, употребленнаго обоими, было равно?

Отв. 189 выстрѣловъ.

76. Отчего, спросилъ одинъ путешественникъ другаго, ты обогналъ меня на 3000 футовъ, между тѣмъ, какъ я дѣлалъ шаги вдвое болѣе твоихъ? — Оттого, что я сдѣлалъ впятеро болѣе шаговъ, чѣмъ ты. Спрашивается: сколько каждый путешественникъ прошелъ футовъ?

Отв. Первый 2000, а второй 5000 футовъ.

77. Чтобы сдѣлать предъидущую задачу болѣе общею, пусть число футовъ, на которое второй путешественникъ обогналъ перваго, будетъ $= a$; положимъ, что отношеніе между ихъ шагами по величинѣ $= b : c$, а по числу $= d : e$. Спрашивается: какія выраженія будутъ означать пройденный ими путь?

Отв. $\frac{abd}{ce - bd}$, $\frac{ace}{ce - bd}$.

78. Двѣ величины, которыхъ разность $= d$, находятся между собою, отъ дѣйствія какой-нибудь причины, въ отношеніи чиселъ m къ n; отъ вліянія же другой какой нибудь причины, непрепятствующей дѣйствію первой, тѣ же величины находятся въ отношеніи чиселъ m' къ n'. Найти выраженія для этихъ величинъ?

Отв. Выраженія для этихъ величинъ суть: $\frac{mm'd}{nn' - mm'}$ и $\frac{nn'd}{nn' - mm'}$ или $\frac{mm'}{nn' - mm'} \cdot d$ и $\frac{nn'}{nn' - mm'} \cdot d$. — Для каждаго частнаго случая коэфиціенты передъ d будутъ числа отвлеченныя.

Какія значенія должно дать величинамъ m, m', n, n', d, чтобы 73-ю, 74-ю, 75-ю, 76-ю и 77-ю задачи подвести подъ этотъ общій случай?

79. Двѣ величины, которыхъ разность $= d$, отъ вліянія трехъ различныхъ причинъ, непрепятствующихъ дѣйствію другъ друга, находятся въ отношеніяхъ чиселъ m къ n, m' къ n' и m'' къ n''. Найти выраженія для этихъ величинъ?

Отв. $\frac{mm'm''}{nn'n''-mm'm''}.\ d$, $\frac{nn'n''}{nn'n''-mm'm''}.\ d$ суть выраженія для искомыхъ величинъ, гдѣ коэфиціенты передъ d суть отвлеченныя числа.

80. Если же, вмѣсто разности d, дана будетъ сумма s искомыхъ величинъ: то какъ въ этомъ случаѣ неизвѣстныя величины будутъ выражаться?

Отв. $\frac{mm'm''}{nn'n''+mm'm''}.\ s$, $\frac{nn'n''}{nn'n''+mm'm''}.\ s$ суть выраженія для искомыхъ величинъ.

81. Нѣкто отдалъ капиталъ въ 5500 рублей въ ростъ по 4 процента, и, $4\frac{1}{2}$ года спустя, другой капиталъ въ 8000 рублей по 5 процентовъ. — Если онъ не будетъ брать обратно этихъ капиталовъ, то по прошествіи сколькихъ лѣтъ итогъ процентовъ съ перваго капитала будетъ равняться итогу процентовъ со втораго?

Отв. Черезъ 10 лѣтъ, считая отъ того времени, когда отданъ первый капиталъ.

82. Нѣкто имѣетъ карету такого устройства, что во время ѣзды можно опредѣлить разность оборотовъ колесъ. Извстно, что каждое переднее колесо имѣетъ въ окружности $5\frac{1}{4}$, а каждое заднее $7\frac{1}{8}$ футовъ. Если во время ѣзды переднее колесо сдѣлало 2000 оборотовъ болѣе, чѣмъ заднее, то спрашивается: какъ велико проѣханное пространство?

Отв. 39900 футовъ.

83. Если переднее колесо кареты имѣетъ въ окружности a, а заднее b футовъ, то спрашивается: какъ велико про-

ѣханное пространство, если переднее колесо сдѣлано n оборотовъ болѣе, чѣмъ заднее?

Отв. $\frac{abn}{b-a}$ футовъ.

84. Одинъ виноторговецъ имѣетъ вино двухъ сортовъ; ведро перваго вина стоитъ 36 рублей, а втораго 20 рублей. Онъ хочетъ смѣшать эти вина въ такомъ количествѣ, чтобы получить 50 ведеръ и продавать каждое (безъ барыша и убытка) по 30 рублей. Спрашивается: сколько онъ долженъ взять ведеръ каждаго сорта вина для того, чтобы получить искомую смѣсь?

Отв. $31\frac{1}{4}$ ведро того вина, которое стоитъ 36 рублей и $18\frac{3}{4}$ ведеръ того, которое стоитъ 20 рублей.

85. Цѣна ведра одного вина пусть будетъ $= a$, а другаго $= b$; пусть требуется составить n ведеръ смѣси изъ этихъ двухъ винъ такъ, чтобы цѣна одного ведра этой смѣси была $= c$. Спрашивается: сколько должно взять каждаго сорта вина?

Отв. $\frac{(a-c)n}{a-b}$ ведеръ того вина, которое стоитъ a, и $\frac{(c-b)n}{a-b}$ ведеръ того вина, которое стоитъ b.

86. Нѣкоторый золотыхъ дѣлъ мастеръ имѣетъ у себя серебро двухъ различныхъ пробъ, такъ-что серебро первой пробы стоитъ 96 рублей фунтъ, а второй 82 рубля фунтъ. Требуется сдѣлать сосудъ въ 20 фунтовъ вѣсомъ изъ такого серебра, котораго бы фунтъ стоилъ 90 рублей. Спрашивается: сколько фунтовъ каждаго серебра долженъ онъ употребить на этотъ сосудъ?

Отв. Первой пробы $11\frac{3}{7}$ фунтовъ, а второй $8\frac{4}{7}$ фунтовъ.

87. Нѣкоторый виноторговецъ имѣетъ 40 ведеръ вина, изъ которыхъ каждое стоитъ 10 руб. 50 коп. Спрашивается: сколько онъ долженъ прилить воды, чтобъ могъ безъ обмана продавать ведро по 8 рублей 40 копеекъ.

Отв. 10 ведеръ.

88. Нѣкто имѣетъ 35 фунтовъ серебра 84-й пробы. Спрашивается: сколько фунтовъ должно примѣшать къ нему мѣди, чтобъ получить серебро 72-й пробы?

Отв. $5\frac{5}{6}$ фунтовъ.

89. Спрашивается: сколько къ $7\frac{1}{2}$ фунтамъ серебра, котораго фунтъ стоитъ 70 рублей, должно примѣшать серебра, котораго фунтъ стоитъ 90 рублей, чтобы получить серебро, котораго бы фунтъ стоилъ 86 рублей?

Отв. 30 фунтовъ.

90. Требуется 10 руб. 85 коп. уплатить двугривенными и пятиалтынными такъ, чтобы число монетъ обоего рода было $= 17$. Спрашивается: сколько должны выдать двугривенныхъ и пятиалтынныхъ?

Отв. 6 пятиалтынныхъ и 11 двугривенныхъ.

Въ чемъ задача эта сходствуетъ съ 84-ю и 86-ю? Какъ выразить словами это сходство?

91. Разложить число a на такія двѣ части, чтобы сумма произведеній первой части на m, а второй на n была $= b$?

Отв. $\frac{b-na}{m-n}$, $\frac{ma-b}{m-n}$.

Что изображаютъ эти выраженія, когда $m = n$? И какое значеніе имѣютъ тѣ же выраженія, когда при $m = n$, будетъ также $b = na = ma$?

92. Нѣкоторому человѣку 40 лѣтъ отъ-роду; онъ имѣетъ девятилѣтняго сына. Спрашивается: по прошествіи сколькихъ лѣтъ отецъ будетъ вдвое старѣе сына, который теперь болѣе, чѣмъ вчетверо моложе отца?

Отв. По прошествіи 22-хъ лѣтъ.

93. Нѣкто имѣетъ 30 лѣтъ отъ-роду; у него есть братъ, которому 20 лѣтъ отъ-роду; слѣдовательно отношеніе между

ихъ годами = 3 : 2. По прошествіи какого времени отношеніе между ихъ лѣтами будетъ = 5 : 4 ?

Отв. По прошествіи 20 лѣтъ.

94. Сколько лѣтъ тому назадъ старшій братъ былъ въ шесть разъ старѣе втораго ?

Отв. 18 лѣтъ.

95. Но у него, сверхъ этого брата, есть еще братъ, которому 6 лѣтъ отъ-роду. Чрезъ сколько времени лѣта его будутъ равны суммѣ лѣтъ обоихъ братьевъ ?

Отв. Чрезъ 4 года.

96. Отцу его теперь 49 лѣтъ отъ-роду и, слѣдовательно, всѣ три брата 7-ю годами старше отца. Спрашивается: сколько лѣтъ тому назадъ, лѣта отца равнялись суммѣ лѣтъ трехъ сыновей ?

Отв. $3\frac{1}{2}$ года.

97. Однажды сказалъ ему отецъ его (младшаго сына тогда еще не было на свѣтѣ), что лѣта его четвертою частію превышаютъ сумму лѣтъ обоихъ сыновей. Спрашивается: сколько съ-тѣхъ-поръ прошло времени ?

Отв. 9 лѣтъ.

98. Въ нѣкоторой смѣси, вѣсомъ въ 80 фунтовъ, находятся селитра и сѣра въ такомъ отношеніи, что на 7 частей селитры приходится 3 части сѣры. Спрашивается: сколько должно къ этой смѣси прибавить селитры, чтобы на 11 частей селитры приходилось 4 части сѣры ?

Отв. 10 фунтовъ.

99. Сколько, напротивъ того, должно отъ этой смѣси взять сѣры, чтобы, попрежнему, на 11 частей селитры приходилось 4 части сѣры?

Отв. $3\frac{7}{11}$ фунта.

100. Сколько отъ первой смѣси должно взять сѣры, чтобъ замѣнивъ ее равнымъ вѣсомъ селитры, отношеніе между селитрою и сѣрою было 11 къ 4?

Отв. $2\frac{2}{3}$ фунта.

101. Въ нѣкоторомъ обществѣ было втрое болѣе мужчинъ нежели женщинъ; когда же 8 мужчинъ съ своими женами оставили это общество, то число мужчинъ сдѣлалось въ 5 разъ болѣе числа женщинъ. Спрашивается: сколько первоначально было въ этомъ обществѣ мужчинъ и женщинъ?

Отв. 48 мужчинъ и 16 женщинъ.

102. Найти такое число, что если приложимъ его къ двумъ даннымъ числамъ a и b, то суммы относились бы какъ m къ n? Или, иначе: найти такое число, что если придадимъ къ нему постепенно числа a и b, то суммы были бы въ отношеніи m къ n?

Отв. $\frac{mb - na}{n - m}$.

103. Найти такое число, что если придадимъ его къ a и вычтемъ изъ b, то сумма относилась бы къ разности, какъ m къ n?

Отв. $\frac{mb - na}{m + n}$.

104. Найти такое число, что если вычтемъ оное какъ изъ a, такъ и изъ b, то разности были бы въ отношеніи m къ n?

Отв. $\frac{na - mb}{n - m}$.

Задачи 92, 93, 94, 98, 99 и 100 суть частные случаи послѣднихъ трехъ задачъ. Какія численныя значенія должны принять величины a, b, m и n, чтобы эти формулы приличествовали тѣмъ вопросамъ?

105. Бочка, наполненная виномъ, имѣетъ три крана; чрезъ первый вино вытекаетъ изъ бочки въ продолженіе 2 часовъ; чрезъ второй въ продолженіе 3 часовъ, а чрезъ третій въ продолженіе 4 часовъ. Спрашивается: во сколько времени вытечетъ вино изъ бочки, когда всѣ три крана будутъ открыты вдругъ?

Отв. Въ $55\frac{3}{13}$ минуты.

106. Нѣкоторый бассейнъ можетъ быть наполненъ водою посредствомъ трехъ отверстій: чрезъ первое отверстіе бассейнъ наполняется въ $1\frac{1}{3}$ часа; чрезъ второе въ $3\frac{1}{3}$ часа, а чрезъ третье въ 5 часовъ. Спрашивается: во сколько времени наполнится водою бассейнъ, если всѣ три отверстія будутъ открыты вдругъ?

Отв. Въ 48 минутъ.

107. Чтобъ сдѣлать предъидущую задачу болѣе общею, пусть время, въ которое бассейнъ наполняется чрезъ первое отверстіе $= a$, чрезъ второе $= b$, чрезъ третье $= c$. Какъ будетъ выражаться время, въ теченіе котораго бассейнъ наполнится, когда всѣ три отверстія будутъ открыты вдругъ?

Отв. $\frac{abc}{ab + ac + bc}$.

108. Какъ выразится время, въ теченіе котораго бассейнъ наполнится посредствомъ 4-хъ отверстій, предполагая, что чрезъ первое онъ наполняется во время a, чрезъ второе въ b, чрезъ третье въ c, чрезъ четвертое въ d?

Отв. $\frac{abcd}{abc + abd + acd + bcd}$.

109. Три каменьщика должны вывести стѣну. Первый каменьщикъ можетъ въ 5 дней вывести 8 кубическихъ футовъ; второй въ 4 дня 9 кубическихъ футовъ; а третій въ 6 дней 10

кубическихъ футовъ. Спрашивается: во сколько дней эти три каменьщика выведутъ 756 кубич. футовъ?

Отв. Въ $137\frac{13}{331}$ дней.

110. Одинъ ремесленникъ можетъ сдѣлать работу, выраженную чрезъ a во время, выраженное чрезъ b; другой работу c во время d; третій работу e во время f. Спрашивается: въ какое время эти три ремесленника, работая вмѣстѣ, окончать работу g?

Отв. Во время $\frac{bdfg}{adf+bcf+bde}$. Въ этомъ выраженіи единица времени однородна съ единицею, посредствомъ которой выражены величины b, d и f.

111. Бассейнъ, содержащій $755\frac{1}{4}$ куб. фут. должно наполнить посредствомъ трехъ отверстій. Чрезъ первое отверстіе въ $3\frac{1}{4}$ дня втекаетъ 12 куб. фут., чрезъ второе въ $2\frac{1}{2}$ дня $15\frac{1}{3}$ куб. фут., а чрезъ третье въ 3 дня 17 кубическихъ футовъ. Спрашивается: во сколько времени наполнится бассейнъ?

Отв. Въ $48\frac{3}{4}$ дней.

112. Три причины производятъ отдѣльно во времена t, t', t'', дѣйствія e, e', e''. Спрашивается: въ какое время эти три причины, дѣйствуя вмѣстѣ, произведутъ дѣйствіе E, предполагая, что онѣ не имѣютъ вліянія одна на другую?

Отв. Во время $\frac{Ett't''}{et't''+e'tt''+e''tt'}$. Единица времени въ этомъ выраженіи однородна съ единицею, посредствомъ которой выражены величины t, t', t''.

Въ этой послѣдней задачѣ заключаются 105, 106, 107, 108, 109, 110, 111 задачи. Какимъ образомъ онѣ приводятся къ ней?

113. Нѣкто имѣетъ три куска металловъ одинаковой величины. Перваго куска 5 кубич. фут. вѣсятъ $69\frac{3}{4}$ лотовъ, вто-

раго $3\frac{1}{3}$ куб. фут. вѣсятъ 41 лотъ, а третьяго $4\frac{2}{7}$ кубич. футовъ вѣсятъ 91 лотъ. Если всѣ три куска вѣсятъ вмѣстѣ $949\frac{2}{3}$ лотовъ, то спрашивается: какъ велики были куски?

Отв. Въ 20 куб. футовъ каждый.

114. Въ одномъ многочисленномъ обществѣ условились собрать извѣстную сумму для вспомоществованія одному бѣдному семейству. Когда каждый согласился дать по 80 копеекъ, то оказалось, что сборъ будетъ 27 рублями превышать требуемую сумму; когда же было предложено, чтобы каждый внесъ по 45 копеекъ, то оказалось, что сборъ 4 рублями 50 копейками будетъ менѣе требуемой суммы. — Спрашивается: изъ сколькихъ особъ состояло общество? — какъ велика была требуемая сумма? — и сколько каждый долженъ былъ дать, чтобъ составить предположенный сборъ?

Отв. Общество состояло изъ 90 особъ; требуемая сумма составляла 45 рублей; каждый долженъ былъ внесть 50 копеекъ.

115. Одинъ купецъ, для скорѣйшей уплаты долга, принужденнымъ нашелся продавать нѣкоторый товаръ по собственной цѣнѣ; но, по причинѣ ошибки въ своихъ счетныхъ книгахъ, онъ не могъ найти ни вѣса купленнаго товара, ни цѣны, заплаченной имъ самимъ за него. Онъ помнилъ только, что еслибъ продавалъ фунтъ по 30 копеекъ, то получилъ бы 5 рублей барыша, а еслибъ продавалъ фунтъ по 22 копейки, то имѣлъ бы 15 рублей убытку. Спрашивается: вѣсъ товара и цѣна, заплаченная имъ самимъ за фунтъ онаго?

Отв. Вѣсомъ товару было 250 фунтовъ, и каждый фунтъ стоилъ ему 28 копеекъ.

116. Нѣкто желаетъ разъиграть въ лотерею золотые часы и сдѣлалъ для этого извѣстное число билетовъ. Если онъ положитъ каждый билетъ цѣною по 3 руб. 50 коп. то поте-

ряетъ 20 руб. противъ той цѣны, которой ему стоютъ часы; еслижъ пуститъ каждый билетъ по 3 руб. 86 коп., то выиграетъ 8 руб. 80 копеекъ. Спрашивается: что ему стоили часы, и сколько билетовъ было въ лотереѣ?

Отв. 300 рублей и 80 билетовъ.

117. Одинъ подрядчикъ нанялъ, для построенія нѣкотораго зданія, извѣстное число каменьщиковъ. По вычисленію его нашлось, что если онъ каждому каменьщику будетъ платить по m рублей, то у него ежедневно останется a рублей отъ опредѣленной на рабочихъ суммы; еслиже онъ будетъ платить ежедневно каждому по n рублей, то передержитъ ежедневно b рублей противъ опредѣленной суммы. Спрашивается: сколькихъ каменьщиковъ нанялъ онъ, и какъ велика была опредѣленная на рабочихъ поденная сумма?

Отв. Число каменьщиковъ было $\frac{a+b}{n-m}$, а поденная сумма $\frac{an+bm}{n-m}$ рублей.

118. Найти такія два числа, что если одно изъ нихъ умножимъ на m и m', то эти произведенія превосходили бы другое число количествами a и a'?

Отв. Одно число $\frac{a-a'}{m-m'}$, а другое $\frac{m'a-ma'}{m-m'}$.

Какія частныя значенія должно дать величинамъ m, m', a и a', чтобы 114, 115, 116 и 117 задачи заключались въ этой послѣдней?

119. Найти такое число, которое, будучи умножено на 5, давало бы произведеніе, превышающее 20 такимъ же количествомъ, какимъ данное число менѣе 20?

Отв. $6\frac{2}{3}$.

120. Нѣкто сказалъ: чтобы удовлетворить всѣмъ моимъ потребностямъ, достаточно было бы 5400 рублей годоваго дохода; но еслибъ доходъ мой былъ въ $3\frac{1}{2}$ раза болѣе настоящаго, то я не только могъ бы удовлетворить всѣмъ моимъ потребностямъ, но еще у меня оставалось бы ежегодно столько, сколько теперь недостаетъ мнѣ. Спрашивается: какъ великъ годовой доходъ этого человѣка?

Отв. 2400 рублей.

121. Одного писца спросили, сколько листовъ онъ пишетъ въ недѣлю. Онъ отвѣчалъ: я ежедневно пишу только по 4 часа, а потому не могу написать, какъ бы желалъ, 70 листовъ въ недѣлю. Но если бы я могъ заниматься ежедневно по 10 часовъ, то въ продолженіе недѣли я бы написалъ столькими листами болѣе 70-ти, сколькими я теперь пишу менѣе 70. Спрашивается: сколько листовъ онъ писалъ въ недѣлю.

Отв. 40.

122. Одного землемѣра спросили, какъ велико вымѣренное имъ разстояніе между двумя столбами. Онъ отвѣчалъ: разстояніе между ними гораздо менѣе 1000 футовъ; потому-что если я къ разстоянію между ними придамъ третью часть его, эту сумму увеличу 176, и потомъ умножу на $2\frac{1}{2}$, то получу произведеніе, которое столькими футами будетъ превышать 1000 футовъ, сколькими дѣйствительное разстояніе между столбами менѣе 1000 футовъ. Спрашивается: какъ велико разстояніе между столбами?

Отв. 360 футовъ.

123. Нѣкто, желая купить домъ, хотѣлъ на сей конецъ собрать по равной суммѣ со всѣхъ своихъ должниковъ. Онъ вычислилъ, что если съ каждаго должника потребуетъ по 250 рублей, то у него недостанетъ 2000 рублей на пред-

полагаемую покупку; если же онъ съ каждаго должника возьметъ по 340 рублей, то у него составится сумма, 880 рублями превышающая требуемую. Спрашивается: сколько онъ имѣлъ должниковъ, какъ великъ былъ капиталъ, потребный на покупку дома и по сколько рублей онъ долженъ потребовать съ каждаго должника?

Отв. Число должниковъ было 32; требуемый капиталъ 10000 рублей, а съ каждаго должника ему надобно было потребовать по $312\frac{1}{2}$ рублей.

124. Одинъ купецъ долженъ заплатить въ три термина (срока) слѣдующія суммы: 2832 рубля чрезъ 3 мѣсяца, 2560 рублей чрезъ 9 мѣсяцевъ и 1450 рублей чрезъ 16 мѣсяцевъ; но кредиторъ желаетъ всю сумму 6842 рубля получить вдругъ. Спрашивается: чрезъ сколько времени купецъ долженъ заплатить ему?

Отв. Чрезъ 8 мѣсяцевъ.

125. Нѣкто долженъ въ 4 термина заплатить слѣдующія суммы: сумма a чрезъ l мѣсяцевъ, сумму b чрезъ m мѣсяцевъ, сумму c чрезъ n мѣсяцевъ и сумму d чрезъ p мѣсяцевъ. Спрашивается: чрезъ сколько мѣсяцевъ онъ долженъ заплатить всю сумму $= a + b + c + d$ вдругъ?

Отв. Чрезъ $\frac{al + bm + cn + dp}{a + b + c + d}$ мѣсяцевъ.

126. Капиталистъ обязался дать въ займы одному купцу 16000 рублей на 15 мѣсяцевъ. Но такъ-какъ онъ не можетъ собрать всей суммы вдругъ, то обѣ стороны согласились, чтобы капиталистъ далъ первоначально 5000 рублей, потомъ, по прошествіи 6 мѣсяцевъ, еще 3000 рублей, и наконецъ опять по прошествіи 8 мѣсяцевъ послѣднія 8000 рублей. Спрашивается: сколько времени послѣ вноса послѣднихъ де-

негъ купецъ можетъ пользоваться полнымъ капиталомъ 16000 рублями, чтобы обѣ стороны не потерпѣли убытка?

Отв. $9\frac{1}{8}$ мѣсяцевъ.

127. Одинъ помѣщикъ обязался пустить на свои пастбища 400 быковъ своего сосѣда, на 16 мѣсяцевъ. Но сосѣдъ, съ согласія помѣщика, прислалъ первоначально только 200 штукъ, по прошествіи 7 мѣсяцевъ 250 штукъ, и потомъ, спустя 8 мѣсяцевъ, еще 150 штукъ. Спрашивается: сколько времени послѣ послѣдняго пригона помѣщикъ долженъ продержать всѣхъ 600 быковъ, чтобы выполнить свое обязательство?

Отв. $2\frac{1}{3}$ мѣсяца.

128. Нѣкто сторговалъ извѣстный товаръ за 4500 рублей, съ условіемъ уплатить эту сумму чрезъ годъ. Но потомъ онъ уговорился съ продавцемъ, чтобы при покупкѣ внести только 1500 рублей, а остальные 3000 рублей уплатить въ четыре одинаковые термина, каждый разъ по 750 рублей. Спрашивается: какіе должны быть эти одинаковые термины, чтобы ни одна сторона не осталась въ накладкѣ?

Отв. $7\frac{1}{5}$ мѣсячные термины.

129. Нѣкоторую сумму должно выплатить слѣдующимъ образомъ: 1376 рублей чрезъ 5 мѣсяцевъ, потомъ, спустя 3 мѣсяца, 2560 рублей, а остатокъ спустя еще 5 мѣсяцевъ. Но еслибъ требовалась всю сумму заплатить вдругъ, то это бы должно было сдѣлать по прошествіи 10 мѣсяцевъ. Спрашивается: какъ велика была сумма?

Отв. 7936 рублей.

130. Нѣкто долженъ уплатить 7000 рублей, а именно: 2000 рублей чрезъ $3\frac{1}{2}$ мѣсяца, 3500 рублей чрезъ 4 мѣсяца

и 1500 рублей чрезъ 14 мѣсяцевъ. Но кредиторъ его предложилъ ему, заплатить эту сумму въ два термина, каждый разъ половину суммы, и притомъ такъ, чтобы второй терминъ былъ мѣсяцемъ позже перваго. Спрашивается: когда наступитъ первый терминъ?

Отв. Чрезъ $3\frac{2}{3}$ мѣсяца.

131. При продажѣ сада явились два покупщика. Одинъ давалъ 7705 рублей; т. е. 3365 рублей чистыми деньгами и 4340 рублей чрезъ 8 лѣтъ; или, если владѣлецъ сада пожелаетъ, то и эту послѣднюю сумму также чистыми деньгами, за вычетомъ 5 простыхъ процентовъ. Второй покупщикъ предлагалъ другую сумму, съ уплатою оной по равнымъ частямъ въ три термина, считая каждый терминъ въ 2 года, т. е. первую треть суммы чрезъ 2 года, вторую чрезъ 4 и послѣднюю чрезъ 6 лѣтъ; или, если владѣлецъ пожелаетъ, то онъ соглашался внести немедленно всю сумму за вычетомъ 5 простыхъ процентовъ. Владѣлецъ сада нашелъ, что условія, предлагаемыя обоими покупщиками, сводились на одно. Спрашивается: какъ велика сумма, предложенная вторымъ покупщикомъ?

Отв. 7722 рубля.

132. Три купца, A, B, C, сложились для общаго торга. A положилъ 1200 рублей на 8 мѣсяцевъ, B 800 рублей на мѣсяцевъ, а C 600 рублей на 14 мѣсяцевъ. Они пріобрѣли барыша 500 рублей. Спрашивается: сколько каждый долженъ получить изъ него?

Отв. A $184\frac{8}{13}$, B $153\frac{11}{13}$, C $161\frac{7}{13}$ рублей.

133. Предположимъ, что въ предъидущей задачѣ A внесъ капиталъ $= a$ на l мѣсяцевъ, B капиталъ $= b$ на m мѣсяцевъ, а C капиталъ $= c$ на n мѣсяцевъ. Пусть ба-

рышъ $= g$. Спрашивается: сколько каждый долженъ получитъ изъ него?

Отв. A долженъ получить $\frac{alg}{al+bm+cn}$, B $\frac{bmg}{al+bm+cn}$, C $\frac{cng}{al+bm+cn}$.

134. Три купца предприняли общій торгъ. Одинъ внесъ 17000 рублей, второй 13000 рублей, третій 10000 рублей. Этотъ послѣдній согласился взять на себя всѣ хлопоты по торгу съ тѣмъ условіемъ, чтобы онъ получилъ, сверхъ той части барыша, которая ему будетъ слѣдовать, еще 3 процента съ оной. По окончаніи торга оказалось, что они пріобрѣли $35262\frac{1}{2}$ рубля барыша. Спрашивается: сколько долженъ получить изъ него каждый?

Отв. Первый 14875 рублей, второй 11375 рублей, а третій $9012\frac{1}{2}$ рублей.

135. На капиталъ въ 3139 рублей поступили требованія отъ трехъ кредиторовъ. Первый долженъ получить 2000, второй 2500, а третій 3500 рублей. Но такъ-какъ этого капитала недостаточно на уплату всѣмъ тремъ кредиторамъ требуемыхъ ими суммъ сполна, и какъ требованія ихъ не всѣ равно-законны, то положено раздѣлить капиталъ соразмѣрно требованіямъ этихъ кредиторовъ съ тѣмъ, однакожь, чтобы, по причинѣ большой законности требованій, второй получилъ 10-ю, а третій 25-ю процентами болѣе слѣдуемыхъ имъ частей. Спрашивается: сколько каждый долженъ получить?

Отв. Первый 688, второй 946, а третій 1505 рублей.

136. Капиталъ въ предъидущей задачѣ пусть будетъ $= a$ требованіе трехъ кредиторовъ пусть будетъ f, g, h; положимъ, что второй долженъ получить m процентами, а тре-

тій n процентами болѣе перваго. Спрашивается: сколько получитъ каждый?

Отв. Первый $\frac{100af}{100(f+g+h)+gm+hn}$,

второй $\frac{(100+m)ag}{100(f+g+h)+gm+hn}$,

третій $\frac{(100+n)ah}{100(f+g+h)+gm+hn}$ рублей.

Какъ должно переобразовать эти формулы, если, напримѣръ, второй кредиторъ вмѣсто того, чтобы получить m процентами болѣе, долженъ получить m процентами менѣе?

137. Трое, A, B, C, сложили нѣкоторую сумму для общаго торга. B внесъ въ полтора раза болѣе чѣмъ A, а C 300 рублями болѣе чѣмъ A и B вмѣстѣ. По прошествіи нѣкотораго времени они раздѣлили между собою барышъ, составляющій 5020 рублей, и C получилъ изъ него 2570 рублей. Спрашивается: сколько внесъ каждый?

Отв. A 2450, B 3675, C 6425 рублей.

138. Три купца A, B, C, согласились торговать вмѣстѣ. C внесъ на сей конецъ 5600 рублей, а A 320-ю рублями менѣе чѣмъ B. A взялъ свой капиталъ чрезъ 7 мѣсяцевъ, B чрезъ 14, а C чрезъ 12 мѣсяцевъ. Барышъ, составляющій $2402\frac{1}{6}$ рубля былъ раздѣленъ между ними соразмѣрно вкладамъ и времени, и B получилъ изъ этого барыша $879\frac{2}{3}$ рублей. Спрашивается: какъ велики вклады купцовъ A и B?

Отв. A 3450, B 3770 рублей.

139. Нѣкто, умирая, оставилъ 4 сыновей и капиталъ въ 1100 рублей. Духовную открыли по прошествіи 10 мѣсяцевъ, и оказалось, что наслѣдники, въ продолженіе этого времени, издержали уже капиталъ, такъ и проценты съ него. При таковыхъ же издержкахъ и при тѣхъ же процентахъ трое

другихъ наслѣдниковъ прожили 1200 рублей въ 15 мѣсяцевъ. Спрашивается: какъ велики были проценты, получаемые съ этихъ обоихъ капиталовъ и во сколько времени, при тѣхъ же обстоятельствахъ, шесть наслѣдниковъ проживутъ 1650 рублей?

Отв. Съ капиталовъ получалось ежемѣсячно $\frac{2}{3}$ процента, и шесть наслѣдниковъ въ 10 мѣсяцевъ проживутъ данный капиталъ.

140. Пять братьевъ въ продолженіе 9 мѣсяцевъ прожили капиталъ въ 4800 рублей и проценты съ него за это время. При тѣхъ же обстоятельствахъ двое другихъ братьевъ въ 16 мѣсяцевъ прожили капиталъ въ 3320 рублей и проценты съ него за это время. Въ обоихъ случаяхъ процентъ съ капиталовъ былъ одинаковъ. Спрашивается: сколько каждый издерживалъ въ мѣсяцъ?

Отв. $110\frac{2}{3}$ рублей.

141. Нѣкоторому слугѣ было положено въ годъ: 40 рублей жалованья и ливрея. По прошествіи 6 мѣсяцевъ онъ отошелъ и получилъ за это время ливрею и 6 руб. 50 коп. жалованья. Спрашивается: сколько стоила ливрея?

Отв. 27 рублей.

142. Одинъ крестьянинъ нанялъ двухъ работниковъ за равную цѣну. Одному изъ нихъ онъ заплатилъ однажды, за 56 дней, 4 четверика ржи и 14 рублей деньгами; а другому за 84 дня $7\frac{1}{2}$ четвериковъ ржи и 17 руб. 76 коп. деньгами. Спрашивается: сколько стоилъ четверикъ ржи?

Отв. 2 рублей 16 копеекъ.

143. Одинъ слуга получилъ однажды отъ своего господина 7 полуимперіаловъ и 40 руб. 25 коп. ассигнаціями жалованья за 7 мѣсяцевъ, а въ другой разъ 5 полуимперіаловъ и 128 руб. 75 коп. ассигнаціями за 9 мѣсяцевъ, тогда-какъ

мѣсячное жалованья его оставалось то же самое. Спрашивается: во сколько господинъ его считалъ полуимперіалъ?

Отв. Въ 19 руб. 25 коп. ассигнаціями.

144. Одинъ мастеровой нанялъ работника съ тѣмъ условіемъ, что этотъ послѣдній будетъ получать за каждый день, въ который онъ будетъ работать на хозяина, по 80 коп., а за всякій день, въ который онъ будетъ работать гдѣ-нибудь въ другомъ мѣстѣ, хозяинъ вычтетъ съ него по 50 коп. за столъ. По прошествіи 50 дней мастеровой выдалъ работнику 28 руб. 80 коп. Спрашивается: сколько дней работникъ работалъ на хозяина?

Отв. 36 дней.

145. Крестьянинъ принесъ на рынокъ корзину съ яицами и намѣренъ былъ продать по 7 копеекъ штуку. Одинъ прохожій случайно толкнулъ корзину ногою и разбилъ 5 яицъ. Получивъ вознагражденіе за причиненный убытокъ, крестьянинъ разсчелъ, что если онъ оставшіяся у него яица будетъ продавать по 8 коп. штуку, то выручитъ то же самое, что получилъ бы, продавая полное число яицъ по прежней цѣнѣ, и такимъ образомъ деньги, полученныя имъ за убытокъ, останутся у него въ барышѣ. Спрашивается: сколько яицъ онъ принесъ на рынокъ?

Отв. 40.

146. Одного повара спросили: сколько онъ купилъ лимоновъ. Онъ отвѣчалъ, что дюжина лимоновъ стоитъ ему 3 рубля; но еслибъ ему дали за ту же цѣну еще 5 лимоновъ, которые онъ просилъ въ придачу, то дюжина лимоновъ стоила бы ему 50 копейками дешевле. Спрашивается: сколько штукъ было у него?

Отв. 25 штукъ.

147. Одинъ купецъ выписалъ кусокъ сукно и заплатилъ по 22 руб. 50 коп. за аршинъ. Когда же онъ перемѣрилъ этотъ

кусокъ, то хотя нашелъ, что въ немъ 5-ю аршинами болѣе противъ того числа, за которое онъ заплатилъ, но за то сукно такъ было худо, что, не имѣя случая отослать этотъ кусокъ обратно, онъ принужденъ продавать аршинъ по 19 р. 50 коп., и, по его вычисленію, онъ, при таковой продажѣ понесетъ убытку $6\frac{1}{9}$ процентовъ. Спрашивается: сколько аршинъ было въ кускѣ?

Отв. Купецъ заплатилъ за 60 аршинъ, а въ кускѣ было 65 аршинъ.

148. Теперь, сказалъ нѣкто, я издерживаю седьмую часть моего жалованья на театръ, а остальное употребляю на мои прочія потребности; но еслибъ мнѣ прибавили 100 руб., то я бы издерживалъ пятую часть жалованья на театръ и всетаки на прочія потребности у меня оставалось бы 40 рублями болѣе прежняго. Спрашивается: какъ велико было его жалованье?

Отв. 700 рублей.

149. Нѣкто издерживалъ четвертую часть своего годоваго жалованья на покупку книгъ; но, по причинѣ прибавки онаго, онъ рѣшился издерживать на книги третью часть, ибо, по его разсчету, несмотря на такое увеличеніе, у него остается на прочія издержки столько же, сколько и прежде. Спрашивается: какъ велика была прибавка въ отношеніи къ его прежнему жалованью?

Отв. Прибавка составляла восьмую часть его прежняго жалованья.

150. Въ одномъ городѣ каждый хозяинъ дома обязанъ былъ седьмую часть доходовъ съ своего дома издерживать на городскія повинности; но пошлина эта увеличилась и каждый владѣлецъ дома долженъ былъ платить шестую часть доходовъ съ онаго. Спрашивается: какою частью долженъ онъ

увеличить плату за наемъ дома, дабы, за уплатою новыхъ повинностей, у него оставалось столько же, сколько и прежде?

Отв. Одною тридцать-пятою частью прежней платы за наемъ.

151. У меня была однажды нѣкоторая сумма денегъ. Я взялъ изъ этой суммы третью часть и положилъ вмѣсто нея 50 рублей. Потомъ изъ этой новой суммы я взялъ четвертую часть и положилъ за оную 70 рублей. Сосчитавъ послѣ этого, я нашелъ, что сумма составляла 120 рублей. Спрашивается: сколько въ ней было прежде?

Отв. 25 рублей.

152. Изъ нѣкоторой суммы взято сперва 50 рублями болѣе половины оной; изъ остатка взято потомъ 30 рублями болѣе пятой части онаго, и изъ этого послѣдняго остатка еще взято 20 рублями болѣе четвертой части онаго. Послѣ этого осталось только 10 рублей. Спрашивается: какъ велика была первоначальная сумма.

Отв. 275 рублей.

153. Нѣкто въ своей духовной назначилъ нѣкоторую сумму тремъ своимъ слугамъ, которая должна быть раздѣлена между ними слѣдующимъ образомъ: камердинеръ долженъ получить 200 рублей и еще половину оставшейся суммы; поваръ долженъ получить пятую часть остатка и, сверхъ этого, еще 400 рублей; остальные же 520 рублей долженъ получить кучеръ. Спрашивается: какъ велика была оставленная сумма?

Отв. 2500 рублей.

154. Крестьянинъ привезъ въ городъ нѣкоторое число яицъ и продалъ 4 штуками болѣе половины привезенныхъ имъ яицъ; потомъ онъ продалъ 2 штуками болѣе половины оставшихся у него яицъ. Вслѣдъ за этимъ, по его неосторожности, у него украли 6 штуками болѣе половины быв-

шихъ у него яицъ и онъ съ оставшимися у него 2 штуками возвратился домой. Спрашивается: сколько яицъ привезъ онъ въ городъ?

Отв. 80.

155. Одинъ купецъ ежегодно увеличивалъ свой капиталъ третьею частью онаго; но при концѣ каждаго года бралъ 1000 рублей на расходы. По истеченіи третьяго года, взявъ опредѣленные имъ на расходы 1000 рублей, оказалось, что капиталъ его увеличился вдвое. Спрашивается: какъ великъ былъ его первоначальный капиталъ?

Отв. 11100 рублей.

156. Одинъ купецъ увеличиваетъ свой капиталъ ежегодно 20-ю процентами; но всякій годъ беретъ изъ онаго 1000 рублей на расходы. По истеченіи трехъ лѣтъ, взявъ опредѣленные имъ на расходы 1000 рублей, онъ нашелъ, что къ капиталу его прибыло 200 рублями болѣе чѣмъ $\frac{3}{5}$ первоначальнаго его капитала. Спрашивается: какъ великъ былъ первоначальный капиталъ?

Отв. 30000 рублей.

157. Одинъ отецъ раздѣлилъ извѣстное число яблокъ между пятью сыновьями слѣдующимъ образомъ: старшему сыну онъ далъ 8 штуками менѣе половины всѣхъ бывшихъ у него яблокъ; второму 8 штуками менѣе половины оставшихся у него яблокъ; третьему и четвертому въ той же самой соразмѣрности, и наконецъ пятому остальныя 20 яблокъ. Спрашивается: сколько яблокъ роздалъ онъ?

Отв. 80.

158. Найти такое число, что если умножимъ его на $3\frac{3}{7}$, изъ произведенія вычтемъ 60, остатокъ умножимъ на $2\frac{1}{2}$ и изъ этого произведенія вычтемъ 30, то не осталось бы ничего?

Отв. 21.

159. Нѣкто отдалъ свой капиталъ въ ростъ по 4 процента. По прошествіи двухъ лѣтъ онъ взялъ четвертрю часть капитала, но прошествіи 7 мѣсяцевъ онъ опять взялъ четвертую часть оставшагося капитала, а по прошествіи 13 мѣсяцевъ потребовалъ весь остальной капиталъ. Въ продолженіе этихъ 44 мѣсяцевъ онъ получилъ процентовъ $6093\frac{3}{4}$ рубля. Спрашивается: какъ великъ былъ его первоначальный капиталъ?

Отв. 50000 рублей.

160. Одинъ отецъ оставилъ нѣсколько сыновей и извѣстный капиталъ, который должно раздѣлить между ними слѣдующимъ образомъ: первый сынъ долженъ получить 100 рублей и еще десятую часть остатка; второй 200 рублей и десятую часть остатка; третій 300 рублей и десятую часть остатка, и такъ далѣе; т. е. каждый послѣдущій долженъ получить 100 рублями болѣе предъидущаго и десятую часть остатка. По раздѣленіи всей суммы оказалось, что всѣ сыновья получили поровну. Спрашивается: какъ великъ былъ капиталъ и сколько было сыновей?

Отв. Капиталъ былъ 8100 руб.; сыновей было 9.

161. Но если первый сынъ долженъ получить 30 рублей и девятую часть остатка, второй 60 и девятую часть остатка, и такъ далѣе; т. е. каждый послѣдующій 30-ю рублями болѣе предъидущаго и девятую часть остатка, то спрашивается: какъ великъ долженъ быть капиталъ и сколько должно быть сыновей, чтобы всѣ получили поровну?

Отв. 1920 рублей и 8 сыновей.

162. Положимъ вообще, что первый сынъ долженъ получить a рублей и n-ю часть остатка; а каждый послѣдующій a рублями болѣе и n-ю часть остатка. Спрашивается: какъ великъ долженъ быть капиталъ и сколько должно быть сыновей, чтобы всѣ получили поровну?

Отв. Капиталъ $= (n-1)^2\ a$; число сыновей $= n-1$.

163. Одинъ генералъ хотѣлъ построить свой полкъ въ видѣ квадрата. Онъ пробовалъ сдѣлать это двоякимъ образомъ; въ первый разъ у него осталось 39 человѣкъ лишнихъ, во второй же разъ, когда онъ сторону квадрата увеличилъ однимъ человѣкомъ, у него недоставало 50 человѣкъ. Спрашивается: сколько человѣкъ было въ полку?

Отв. 1975 человѣкъ.

164. Нѣкто имѣетъ извѣстное число цѣлковыхъ, которое онъ хочетъ разложить въ видѣ квадрата. При первомъ опытѣ у него осталось 130 цѣлковыхъ лишнихъ; когда же онъ увеличилъ сторону квадрата 3-мя цѣлковыми, то у него осталось только 31 цѣлковый лишнихъ. Спрашивается: сколько цѣлковыхъ у него было?

Отв. 355.

165. Найти такое число, что если придадимъ къ оному постепенно числа a и b, то разность квадратовъ этихъ суммъ была бы $= d$?

Отв. $\frac{d - a^2 + b^2}{2\ (a - b)}$.

Заключаются ли въ этой послѣдней задачѣ двѣ предшествующія ей?

166. Требуется опредѣлить величину трехъ бочекъ; извѣстно только что если, наполнивъ вторую бочку виномъ, выльемъ его въ первую, то во второй останется $\frac{2}{9}$ части вина; если, наполнивъ третью бочку виномъ, перельемъ его во вторую, то въ третьей останется $\frac{1}{4}$ часть вина; если же, наполнивъ первую бочку, перельемъ изъ нея въ третью, то 50 ведеръ будетъ недоставать для наполненія третьей. Спрашивается: сколько ведеръ вина входитъ въ каждую бочку?

Отв. Въ первую 70, во вторую 90, въ третью 120 ведеръ.

167. Нѣкто имѣетъ 4 бочки различной величины. Если, наполнивъ первую бочку виномъ, перельемъ его во вторую,

то въ первой останется $\frac{4}{7}$ части вина; если, наполнивъ вторую, перельемъ изъ нея въ третью, то во второй останется $\frac{1}{4}$ часть вина; если изъ наполненной третьей бочки перельемъ въ четвертую, то вино наполнитъ только $\frac{9}{10}$ этой послѣдней; если же изъ наполненной первой бочки станемъ переливать въ третью и четвертую, то не только наполнимъ обѣ эти послѣднія бочки, но, сверхъ того, въ первой останется еще 15 ведеръ. Спрашивается: сколько ведеръ вина входитъ въ каждую бочку?

Отв. Въ первую 140, во вторую 60, въ третью 45, въ четвертую 80 ведеръ.

ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНІЙ ПЕРВОЙ СТЕПЕНИ СО МНОГИМИ НЕИЗВѢСТНЫМИ ВЕЛИЧИНАМИ.

1. Найти два числа, которыхъ бы сумма равнялась 70, а разность 16?

Отв. 43 и 27.

2. Найти два числа, которыхъ бы сумма равнялась a, а разность b?

Отв. $\frac{a+b}{2}$ и $\frac{a-b}{2}$.

3. Въ двухъ кошелькахъ находится 300 рублей. Если изъ одного возьмемъ 30 рублей и положимъ въ другой, то въ обоихъ кошелькахъ будетъ поровну. Спрашивается: сколько было въ каждомъ кошелькѣ?

Отв. Въ одномъ 180, въ другомъ 120 рублей.

4. A сказалъ B: дай мнѣ 100 рублей, то у меня будетъ столько же денегъ, сколько и у тебя. Нѣтъ, отвѣчалъ B, дай лучше мнѣ 100 рублей, то у меня будетъ вдвое болѣе чѣмъ у тебя. Спрашивается: сколько денегъ было у каждаго?

Отв. У A 500, у B 700 рублей.

5. Нѣкто имѣетъ двѣ табакерки. Если онъ въ одну изъ нихъ положитъ 8 рублей, то цѣнность этой будетъ вдвое менѣе цѣнности другой табакерки. Если же онъ, вынувъ изъ первой табакерки 8 рублей, положитъ ихъ во вторую, то цѣнность этой послѣдней будетъ втрое болѣе цѣнности первой. Спрашивается цѣна каждой табакерки.

Отв. Цѣна первой 24, а второй 64 рубля.

6. A и B, вмѣстѣ, имѣютъ капиталъ, составляющій 5700 рублей. Еслибъ часть, принадлежащая A, была втрое болѣе дѣйствительной, а часть B впятеро болѣе, то оныя вмѣстѣ составили бы капиталъ въ 23500 рублей. Спрашивается: какъ велика часть каждаго?

Отв. Часть A 2500, а B 3200 рублей.

7. Найти два числа, имѣющія слѣдующее свойство: если первое умножимъ на 2, а второе на 5, то сумма этихъ двухъ произведеній должна быть $= 31$; если же первое умножимъ на 7, а второе на 4, то сумма произведеній должна составить 68?

Отв. Первое число 8, а второе 3.

8. Найти такія два числа, что если умножимъ первое на a, а второе на b, то сумма произведеній была бы $= k$; если же первое число умножимъ на a', а второе на b', то сумма этихъ произведеній равнялась бы k'?

Отв. $\frac{b'k - bk'}{ab' - a'b}, \frac{ak' - a'k}{ab' - a'b}$.

9. Найти два числа по слѣдующимъ признакамъ: если первое увеличимъ 4-мя, то оно въ $3\frac{1}{4}$ раза должно быть болѣе втораго; если же второе увеличимъ 8-ю, то оно должно быть вдвое менѣе перваго?

Отв. 48 и 16.

10. Найти такія два числа, что если увеличимъ первое изъ нихъ количествомъ a, то оно должно быть въ m разъ болѣе втораго; если же второе увеличимъ количествомъ b, то оно должно быть въ n разъ болѣе перваго?

Отв. Первое $= \frac{a + mb}{mn - 1}$, второе $= \frac{b + na}{mn - 1}$.

11. Сколько лѣтъ каждому изъ насъ? спросилъ сынъ своего отца. 6 лѣтъ тому назадъ, отвѣчалъ этотъ послѣдній, я былъ одною третью болѣе, чѣмъ втрое старше тебя; но чрезъ три года лѣта твои, умноженныя на $2\frac{1}{6}$ будутъ равняться моимъ. Спрашивается лѣта каждаго.

Отв. Отцу было 36, а сыну 15 лѣтъ отъ-роду.

12. A и B, вмѣстѣ, имѣютъ капиталъ, составляющій 98000 рублей. Для нѣкотораго торга A даетъ шестую часть, а B пятую часть своихъ денегъ, и у обоихъ остается поровну. Спрашивается: какъ великъ капиталъ каждаго?

Отв. Капиталъ $A = 48000$, а $B = 50000$ рублей.

13. A имѣетъ долгу 1200, а B 2550 рублей; но у каждаго изъ нихъ не достаетъ денегъ для уплаты своего долга. A говоритъ B: дай мнѣ восьмую часть твоихъ денегъ, и я буду въ состояніи уплатить мой долгъ. B отвѣчалъ на это: если ты мнѣ дашь шестую часть твоихъ денегъ, то я также буду въ состояніи уплатить мой долгъ. Спрашивается: сколько у каждаго изъ нихъ было денегъ?

Отв. У A 900, а у B 2400 рублей.

14. Одинъ капиталистъ взялъ 8000 рублей на выгодныхъ условіяхъ, потому-что самъ имѣлъ случай отдать 23000 рублей на большіе проценты, и эта спекуляція принесла ему чрезъ годъ 905 рублей процентовъ прибыли. На тѣхъ же самыхъ условіяхъ онъ въ другой разъ взялъ 9400 рублей и отдалъ самъ третьему лицу 17500 рублей; этотъ оборотъ принесъ ему, по прошествіи года, $539\frac{1}{2}$ рублей процентовъ прибыли. Спрашивается: какіе проценты онъ платилъ тѣмъ, у которыхъ занималъ деньги, и какіе бралъ самъ.

Отв. Онъ самъ платилъ по $4\frac{1}{2}$, а бралъ по $5\frac{1}{2}$ процентовъ.

15. Нѣкто имѣетъ два куска желѣза, вѣсъ которыхъ требуется опредѣлить. Извѣстно, что вѣсъ $\frac{2}{3}$ перваго куска 96-ю фунтами менѣе вѣса $\frac{3}{4}$ втораго, а $\frac{5}{8}$ втораго куска вѣсятъ столько же, сколько $\frac{4}{9}$ перваго.

Отв. Вѣсъ перваго куска 720, а втораго 512 фунтовъ.

16. Бассейнъ, содержащій 210 ведеръ воды, можетъ быть наполненъ посредствомъ двухъ отверстій. По сдѣланному опыту оказалось, что если первое отверстіе будетъ открыто 4, а второе 5 часовъ, то чрезъ оба отверстія въ бассейнъ войдетъ 90 ведеръ воды. По другому опыту, при которомъ первое отверстіе было открыто 7, а второе $3\frac{1}{2}$ часа, получили 126 ведеръ воды. Спрашивается: сколько ведеръ воды втекаетъ чрезъ каждое отверстіе въ одинъ часъ? и во сколько времени наполнится бассейнъ, когда вода будетъ пущена вдругъ въ оба отверстія?

Отв. Чрезъ первое отверстіе втекаетъ 15, а чрезъ второе 6 ведеръ въ одинъ часъ; для наполненія же бассейна потребно 10 часовъ.

17. Нѣкто имѣетъ гривенниковъ и двугривенныхъ, вмѣстѣ

числомъ 500, что составляетъ 235 рублей 90 копеекъ. Спрашивается число каждаго рода монетъ.

Отв. 326 гривенниковъ и 174 двугривенныхъ.

18. Нѣкто имѣетъ товара двухъ сортовъ: 8 фунтовъ перваго и 19 фунтовъ втораго сорта, вмѣстѣ, стоятъ 15 рублей 90 копеекъ; а 20 фунтовъ перваго и 16 фунтовъ втораго сорта, вмѣстѣ, стоятъ 24 рубля. Спрашивается: чего стоитъ фунтъ каждаго сорта?

Отв. Перваго 80, а втораго 50 копеекъ.

19. 15 шлезвигскихъ и 33 лейпцигскихъ локтей вмѣстѣ составляютъ столько же, сколько $39\frac{1}{2}$ брабантскихъ локтей; и 24 шлезвигскихъ съ 55 лейпцигскими локтями составляютъ 65 брабантскихъ локтей. Спрашивается: какъ шлезвигскій и лейпцигскій локти содержатся къ брабантскому? какъ содержится шлезвигскій локотъ къ лейпцигскому? и какъ велика разность этихъ послѣднихъ, когда примемъ меньшій изъ нихъ за сто?

Отв. Шлезвигскій локотъ содержится къ брабантскому какъ 5 къ 6; лейпцигскій къ брабантскому какъ 9 къ 11; шлезвигскій къ лейпцигскому какъ 55 къ 54; а принимая лейпцигскій за 100, найдемъ, что шлезвигскій длиннѣе лейпцигскаго на $1\frac{23}{27}$.

20. $17\frac{1}{2}$ данцигскихъ и 19 берлинскихъ футовъ составляютъ вмѣстѣ $34\frac{3}{4}$ рейнландскихъ футовъ; и 5 данцигскихъ съ $9\frac{1}{2}$ берлинскими футами составляютъ $13\frac{53}{56}$ рейнландскихъ. Спрашивается отношеніе данцигскаго и берлинскаго футовъ къ рейнландскому, отношеніе данцигскаго фута къ берлинскому и какъ велика разность этихъ двухъ послѣднихъ футовъ?

Отв. Данцигскій футъ относится къ рейнландскому какъ 32 къ 35; берлинскій къ рейнландскому какъ 75 къ 76; данцигскій къ берлинскому какъ 2432 къ 2625; а принимая

данцигскій за 100, найдемъ, что берлинскій футъ длиннѣе данцигскаго на $7\frac{569}{608}$ или почти на $7\frac{14}{15}$.

21. 40 французскихъ миль, будучи переведены на географическія или нѣмецкія мили, составляютъ $12\frac{1}{2}$ таковыми милями болѣе, чѣмъ 53 англійскихъ; 10 французскихъ и $26\frac{1}{2}$ англійскихъ миль составляютъ вмѣстѣ $11\frac{3}{4}$ нѣмецкихъ миль. Спрашивается отношеніе французской и англійской мили къ нѣмецкой, и французской къ англійской.

Отв. Французская миля относится къ нѣмецкой какъ 3 къ 5; англійская къ нѣмецкой какъ 23 къ 106, и французская къ англійской какъ 318 къ 115.

22. Нѣкто размѣнялъ 250 полуимперіаловъ на червонцы и получилъ за нихъ 416 червонцевъ и сверхъ того, 2 рубля 16 копеекъ. Другой разъ, мѣняя, онъ получилъ, считая потому же самому курсу, за 160 полуимперіаловъ 266 червонцевъ и также 2 рубля 16 копеекъ. Спрашивается: во сколько рублей считали полуимперіалъ и червонецъ?

Отв. Полуимперіалъ въ 5 руб. 40 коп., а червонецъ въ 3 рубля 24 копейки.

23. Одинъ путешественникъ говорилъ, что онъ, путешествуя по Германіи, Франціи и Англіи, издержалъ въ этихъ трехъ государствахъ 8325 талеровъ, а именно: въ Германіи 1520 талеровъ, во Франціи 7540 франковъ и въ Англіи 820 фунтовъ стерлинговъ. Когда же его спросили, какое отношеніе онъ полагаетъ между различными монетами этихъ государствъ, то онъ отвѣчалъ, что 5 фунтовъ стерлинговъ 3 талерами болѣе 108 франковъ. Спрашивается: во сколько онъ считалъ каждаго рода монету?

Отв. Онъ полагалъ фунтъ стерлинговъ въ 6 талеровъ, а франкъ въ 6 грошеновъ. (Талеръ содержитъ 24 грошена).

24. Нѣкто имѣетъ двѣ лошади и два сѣдла, изъ которыхъ одно стоитъ 250, а другое 50 рублей. Если онъ лучшее сѣдло положитъ на первую лошадь, а худшее на вторую, то эта послѣдняя съ сѣдломъ будетъ 200 рублями дешевле первой. Если же онъ худшее сѣдло положитъ на первую, а лучшее на вторую лошадь, то эта послѣдняя съ сѣдломъ будетъ въ $2\frac{5}{7}$ раза дороже первой. Спрашивается цѣна каждой лошади?

Отв. Первая лошадь стоитъ 300, а вторая 700 рублей.

25. Найти такую дробь, что если къ числителю прибавимъ единицу, то дробь должна быть $= \frac{1}{3}$, а если къ знаменателю придадимъ единицу, то дробь должна быть $= \frac{1}{4}$.

Отв. $\frac{4}{15}$.

26. Найти дробь, имѣющую то свойство, что если изъ числителя и знаменателя вычтемъ по 3, то дробь должна обратиться въ $\frac{1}{4}$, а если къ числителю и знаменателю придадимъ по 5, то дробь должна сдѣлаться $= \frac{1}{2}$.

Отв. $\frac{7}{19}$.

27. *B* отдалъ въ ростъ 12600 рублями болѣе чѣмъ *A*, и на свой капиталъ беретъ однимъ процентомъ болѣе, чѣмъ *A*, чрезъ что онъ получаетъ процентовъ въ годъ 730 рублями болѣе. *C* отдалъ въ ростъ 3000 рублями болѣе чѣмъ *A*, и беретъ на свой капиталъ двумя процентами болѣе чѣмъ *A*, чрезъ что онъ получаетъ въ годъ процентовъ 380 рублей болѣе. Спрашивается: сколько каждый изъ нихъ отдалъ въ ростъ и какъ велики проценты, получаемые каждымъ?

Отв. *A* отдалъ въ ростъ 10000 рублей, *B* 22600 рублей, *C* 13000 рублей. *A* беретъ по 4, *B* по 5, а *C* по 6 процентовъ.

28. Одно общество издержало въ трактирѣ нѣкоторую сумму, и притомъ каждый поровну. Еслибъ въ этомъ обществѣ было еще 5 особъ, и каждый издержалъ бы 25 копейками болѣе, то издержанная сумма увеличилась бы 27 рублями 50 копейками; если же, напротивъ, въ обществѣ было бы 3 особами менѣе и каждый издержалъ 30 копейками менѣе, то издержанная сумма уменьшилась бы 16 рублями 80 копейками. Спрашивается: сколько особъ было въ обществѣ и сколько издержалъ каждый?

Отв. Общество состояло изъ 14 особъ и каждый издержалъ по 4 руб. 50 копеекъ.

29. Нѣкоторое сочиненіе должно быть напечатано такъ, чтобы на каждой страницѣ было извѣстное число строкъ, и въ каждой строкѣ извѣстное число буквъ: еслибъ на каждой страницѣ прибавили по три строки, а въ каждую строку по 4 буквы, то на страницѣ было бы 224 буквы болѣе прежняго; если же, напротивъ, на каждой страницѣ убавили бы по 2 строки и въ каждой строкѣ по три буквы, то на страницѣ было бы 145 буквами менѣе. Спрашивается: сколько строкъ полагали помѣстить на каждой страницѣ? и сколько буквъ въ каждую строку?

Отв. 29 строкъ и 32 буквы.

30. Найти такія два числа, что если одно изъ нихъ увеличимъ количествомъ a, а другое b, то произведеніе этихъ суммъ было бы количествомъ c, болѣе произведенія искомыхъ чиселъ; если же одно изъ нихъ увеличимъ количествомъ a', а другое b', то произведеніе этихъ суммъ количествомъ c' превышало бы произведеніе искомыхъ чиселъ?

Отв. Выраженія для искомыхъ чиселъ суть:

$$\frac{a'c - ac' + aa'(b' - b)}{a'b - ab'} \text{ и } \frac{bc' - b'c + bb'(a - a')}{a'b - ab'}.$$

Заключаются ли въ этой послѣдней задачѣ три предшествующія ей? И какія значенія должно дать величинамъ a, b, c, a', b', c', чтобы эти формулы приличествовали этимъ задачамъ?

31. Недавно, сказалъ нѣкто, четверть ржи было 2 руб. 28 коп., а четверть пшеницы 2 руб. 60 коп. дешевле теперешняго; въ то время цѣна ржи содержалась къ цѣнѣ пшеницы какъ 7 : 10; теперь же цѣны эти въ отношеніи какъ 3 : 4. Спрашивается: чего теперь стоитъ четверть ржи и пшеницы?

Отв. Четверть ржи стоитъ 19 руб. 50 коп., а четверть пшеницы 26 рублей.

32. Нѣкто имѣетъ два боченка и въ каждомъ находится нѣкоторое число ведеръ вина. Чтобы въ обоихъ боченкахъ было поровну, то онъ изъ перваго переливаетъ во второй столько, сколько въ этомъ послѣднемъ уже есть вина; потомъ изъ втораго боченка переливаетъ въ первый столько, сколько въ этомъ послѣднемъ оставалось; наконецъ изъ перваго во второй переливаетъ столько, сколько въ этомъ послѣднемъ оставалось послѣ втораго переливанья. Отъ этого оказалось, что въ каждомъ боченкѣ было 16 ведеръ. Спрашивается: сколько ведеръ было въ каждомъ боченкѣ первоначально?

Отв. Въ первомъ 22 ведра, а во второмъ 10 ведеръ.

33. Если въ каждомъ боченкѣ должно быть, наконецъ, по a ведеръ, то сколько ведеръ долженствовало быть первоначально въ каждомъ боченкѣ?

Отв. Въ первомъ $\frac{11}{8}a$, а во второмъ $\frac{5}{8}a$ ведеръ.

34. Одинъ виноторговецъ имѣетъ вино двухъ сортовъ. Если онъ 3 ведра лучшаго вина смѣшаетъ съ 5 ведрами худшаго, то ведро смѣси можетъ продавать по 20 руб.

50 коп.; если же онъ $3\frac{3}{4}$ ведра лучшаго вина смѣшаетъ съ $7\frac{1}{2}$ ведрами худшаго, то ведро смѣси можетъ продавать по 20 рублей. Спрашивается цѣна ведра обоихъ сортовъ винъ?

Отв. Ведро лучшаго вина стоитъ 28 руб., а худшаго 16 рублей.

35. Положимъ вообще, что если a ведеръ перваго вина будутъ смѣшаны съ b ведрами втораго, то цѣна ведра смѣси будетъ c рублей; если же f ведеръ перваго вина будутъ смѣшаны съ g ведрами втораго, то цѣна ведра смѣси будетъ h рублей. Спрашивается цѣна ведра обоихъ сортовъ вина?

Отв. Ведро перваго сорта вина стоитъ $\frac{(a+b)\,cg-(f+g)bh}{ag-bf}$, а втораго сорта $\frac{(a+b)\,cf-(f+g)\,ah}{bf-ag}$ рублей.

36. 37 фунтовъ олова *теряютъ своего вѣса* (*) въ водѣ 5 фунтовъ, а 23 фунта свинца теряютъ въ водѣ 2 фунта вѣса; слитокъ изъ олова и свинца въ 120 фунтовъ, теряетъ въ водѣ 14 фунтовъ вѣса. Спрашивается: сколько олова и свинца въ этомъ слиткѣ?

Отв. 71 фунтъ олова и 46 фунтовъ свинца.

37. 21 фунтъ серебра теряетъ во водѣ 2 фунта вѣса и 9 фунтовъ японской мѣди теряютъ въ водѣ 1 фунтъ. Если слитокъ изъ серебра и мѣди въ 148 фунтовъ, теряетъ въ водѣ $14\frac{2}{3}$ фунтовъ, то спрашивается: сколько серебра и мѣди въ этомъ слиткѣ?

Отв. 112 фунтовъ серебра и 36 фунтовъ мѣди.

(*) Смыслъ этого выраженія предоставляется объяснить самому учителю.

38. Данный кусокъ металла, вѣсомъ въ p фунтовъ, теряетъ въ водѣ a фунтовъ. Но этотъ кусокъ слитъ изъ двухъ различныхъ металловъ A и B, и извѣстно, что p фунтовъ металла A теряютъ въ водѣ b фунтовъ, а p фунтовъ металла B теряютъ въ водѣ c фунтовъ. Спрашивается: сколько фунтовъ каждаго металла находится въ данномъ кускѣ?

Отв. $\frac{(c-a)\,p}{c-b}$ фунтовъ металла A и $\frac{(a-b)\,p}{c-b}$ фунтовъ металла B.

39. По описанію Витрувія корона короля сиракузскаго Гіерона вѣсила 20 фунтовъ и теряла въ водѣ почти $1\frac{1}{4}$ фунта своего вѣса. Если предположимъ, что корона эта была вылита только изъ золота и серебра, и что 19,64 фунтовъ золота теряютъ въ водѣ 1 фунтъ, а 10,5 фунтовъ серебра въ водѣ теряютъ также 1 фунтъ, то спрашивается: сколько золота и серебра было въ этой коронѣ?

Отв. Золота 14,77....., а серебра 5,22..... фунтовъ.

Заключается ли эта задача въ предъидущей? и какія значенія должно дать величинамъ p, a, b, c для рѣшенія этой 39-ой задачи?

40. Свинецъ въ 11,324 раза тяжелѣе воды; вѣсъ воды содержится къ вѣсу пробковаго дерева какъ 1 къ 0,24, а къ вѣсу еловаго дерева какъ 1 къ 0,45. Требуется соединить кусокъ свинца съ кускомъ пробковаго дерева такимъ образомъ, чтобы оставленное тѣло вѣсило 80 фунтовъ и, сверхъ того, имѣло бы одинаковый объемъ съ кускомъ еловаго дерева, вѣсомъ также въ 80 фунтовъ (слѣдовательно, чтобы могло плавать). Спрашивается: сколько слѣдуетъ взять свинца и пробковаго дерева, для составленія требуемаго тѣла?

Отв. 38,14..... фунтовъ свинца и 41,85..... фунтовъ пробковаго дерева.

41. Два разнородныя вещества, изъ которыхъ первое въ p, а второе въ p' разъ тяжелѣе воды, требуется соединить такимъ образомъ, чтобы составленное тѣло было въ p'' разъ тяжелѣе воды и вѣсило q фунтовъ. Спрашивается: сколько слѣдуетъ взять перваго и втораго вещества?

Отв. $\frac{qp(p'-p'')}{p''(p'-p)}$ перваго и $\frac{qp'(p''-p)}{p''(p'-p)}$ втораго вещества.

Между какими предѣлами должно заключаться количество p'', чтобы эта послѣдняя задача была возможна?

42. Найти два числа, которыхъ бы разность, сумма и произведеніе были въ отношеніи чиселъ 2, 3 и 5, т. е. чтобы разность содержалась къ суммѣ какъ 2 къ 3, а сумма къ произведенію какъ 3 къ 5?

Отв. 2 и 10.

43. Найти такія два числа, чтобы сумма ихъ была въ m, а произведеніе въ n разъ болѣе разности искомыхъ чиселъ.

Отв. $\frac{2n}{m-1}$, $\frac{2n}{m+1}$.

44. Найти такія два числа, чтобы сумма ихъ была $= 13$, а разность квадратовъ $= 39$.

Отв. 5 и 8.

45. Найти такія два числа, чтобы сумма ихъ была $= a$, а разность квадратовъ $= b$.

Отв. $\frac{a^2+b}{2a}$, $\frac{a^2-b}{2a}$.

46. Найти такія два числа, чтобы сумма ихъ равнялась a, а частное, происходящее отъ раздѣленія одного изъ нихъ на другое, было $= b$.

Отв. $\frac{a}{b+1}$, $\frac{ab}{b+1}$.

47. Одного человѣка спросили о лѣтахъ: его собственныхъ, его отца и дѣда. Онъ отвѣчалъ: лѣта мои и отца моего составляютъ вмѣстѣ 56 лѣтъ, отца и дѣда вмѣстѣ 100 лѣтъ, а мои и дѣда вмѣстѣ 80 лѣтъ. Спрашиваются лѣта каждаго.

Отв. Онъ самъ имѣлъ 18 лѣтъ отъ-роду, его отецъ 38, а дѣдъ 62 года.

48. Найти такія три числа, чтобы бравъ его по 2, суммы равнялись a, b и c.

Отв. $\frac{a+b-c}{2}$, $\frac{a+c-b}{2}$, $\frac{b+c-a}{2}$.

49. A, B и C, вмѣстѣ, должны 2190 рублей, но ни одинъ изъ нихъ не имѣетъ возможности изъ своихъ денегъ уплатить этотъ долгъ. Если B $\frac{3}{7}$ своихъ денегъ отдаетъ A, то этотъ послѣдній будетъ въ состояніи уплатитъ весь долгъ, а B еслибъ получилъ отъ C $\frac{5}{9}$ денегъ этого послѣдняго; наконецъ C, взявъ у A $\frac{2}{3}$ его денегъ. Спрашивается: сколько каждый изъ нихъ имѣлъ денегъ?

Отв. A 1530, B 1540, C 1170 рублей.

50. A и B, вмѣстѣ, имѣютъ капиталъ, равняющійся $\frac{2}{3}$ капитала C; B и C вмѣстѣ имѣютъ въ 6 разъ болѣе, чѣмъ A; а еслибъ B имѣлъ 680 рублями болѣе того, что имѣетъ, то его капиталъ равнялся бы капиталамъ A и C вмѣстѣ. Спрашивается капиталъ каждаго.

Отв. A имѣлъ 200, B 360, а C 840 рублей.

51. Нѣкто имѣетъ три кошелька и въ каждомъ находится нѣкоторая сумма денегъ. Если онъ изъ перваго кошелька возьметъ 20 рублей и положитъ ихъ во второй, то въ этомъ послѣднемъ будетъ вчетверо болѣе того, сколько осталось въ первомъ. Если онъ изъ втораго кошелька вынетъ 60 руб-

лей и положитъ ихъ въ третій, то въ этомъ послѣднемъ будетъ въ $1\frac{3}{4}$ раза болѣе того, что осталось во второмъ. Наконецъ, если онъ изъ третьяго кошелька возьметъ 40 рублей и положитъ ихъ въ первый, то въ третьемъ останется еще въ $2\frac{7}{8}$ раза болѣе того, сколько окажется въ первомъ послѣ этой придачи. Спрашивается: сколько въ каждомъ кошелькѣ было денегъ?

Отв. Въ первомъ 120, во второмъ 380, а въ третьемъ 500 рублей.

52. *A*, *B* и *C* сравниваютъ свои капиталы. *A* говоритъ *B*: дай мнѣ 700 рублей, то у меня будетъ вдвое болѣе того, что у тебя останется. *B* говоритъ *C*: дай мнѣ 1400 рублей, то у меня будетъ вдвое болѣе того, что у тебя останется. *C* говоритъ *A*: дай мнѣ 420 рублей, то у меня будетъ впятеро болѣе того, что у тебя останется. Спрашивается: сколько у каждаго изъ нихъ было денегъ?

Отв. У *A* 980, у *B* 1540, у *C* 2380 рублей.

53. Найти три числа, имѣющія слѣдующее свойство: если изъ перваго вычтемъ 4 и придадимъ 4 ко второму, то остатокъ долженъ относиться къ суммѣ какъ 1 къ 2; если изъ втораго вычтемъ 10 и приложимъ 10 къ третьему, то остатокъ долженъ содержаться къ суммѣ какъ 3 къ 10; если изъ перваго вычтемъ 3 и приложимъ это же число 3 къ третьему, то остатокъ долженъ относиться къ суммѣ какъ 3 къ 11?

Отв. 20, 28, 50.

54. *A*, *B* и *C* имѣютъ вмѣстѣ 1820 рублей. Если *B* дастъ *A* 200 рублей изъ своихъ денегъ, то у *A* будетъ 160 рублями болѣе, чѣмъ у *B*; если же *C* дастъ *B* 70 рублей, то у обоихъ будетъ поровну. Спрашивается: сколько у каждаго изъ нихъ было денегъ?

Отв. У *A* 400, у *B* 640, у *C* 780 рублей.

55. Три особы издержали вмѣстѣ нѣкоторую сумму денегъ, но ни одинъ изъ нихъ не въ состояніи уплатить всей суммы. *A* говоритъ *B*: дай мнѣ четвертую часть твоихъ денегъ, то я одинъ могу уплатить всю сумму, *B* говоритъ *C*: дай мнѣ восьмую часть твоихъ денегъ, то я также одинъ могу уплатить всю сумму; *C* говоритъ *A*: дай мнѣ половину твоихъ денегъ, то и я, несмотря на то, что имѣю при себѣ только 4 рубля, могу уплатить всю сумму. Спрашивается: сколько они издержали и сколько *A* и *B* имѣли при себѣ денегъ?

Отв. Они издержали $6\frac{1}{2}$ рублей. А имѣлъ 5, а *B* 6 рублей.

56. Нѣкто имѣетъ три куска серебра различной пробы, а именно: 84-й, 72-й и 60-й. Если сплавимъ первый кусокъ со вторымъ, то получимъ серебро 76-й пробы; если же сплавимъ первый кусокъ съ третьемъ, то получимъ серебро $70\frac{2}{3}$ пробы. Извѣстно, что всѣ три куска вмѣстѣ вѣсятъ 34 фунта. Спрашивается: сколько вѣситъ каждый кусокъ порознь?

Отв. Первый кусокъ 8, второй 16, а третій 10 фунт.

57. Нѣкто 52 рубля 55 копеекъ заплатилъ 5 червонцами, 7 полуимперіалами и 2 рублями; въ другой разъ 65 рублей 95 копеекъ онъ заплатилъ 4 червонцами, 9 полуимперіалами и 8 рублями; въ третій разъ 69 рублей 70 копеекъ 12 червонцами, 6 полуимперіалами и 4 рублями. Каждый разъ курсъ монетъ былъ одинъ и тотъ же. Спрашивается: во сколько онъ цѣнилъ монету каждаго рода?

Отв. Червонецъ въ 2 руб. 90 коп., полуимперіалъ въ 5 руб. 15 коп., а рубль въ 100 копеекъ.

58. Нѣкто имѣетъ три сарая; въ каждомъ изъ нихъ находится извѣстное число пшеницы, ржи и ячменю; а имен-

но: въ первомъ сараѣ 8 четвертей пшеницы, 3 четверти ржи и 5 четвертей ячменю; во второмъ 3 четверти пшеницы, 10 четвертей ржи и 7 четвертей ячменю; въ третьемъ 6 четвертей пшеницы, 9 четвертей ржи и 13 четвертей ячменю. Въ первомъ сараѣ находится на 183 рубля 50 копеекъ, во второмъ на 203 рубля, а въ третьемъ на 282 рубля 50 копеекъ. Спрашивается: чего стоитъ четверть каждаго рода хлѣба?

Отв. Четверть пшеницы 14 рублей, четверть ржи 10 рублей 50 копеекъ и четверть ячменю 8 рублей.

59. *A*, *B* и *C* купили кофе, сахару и чаю по одинаковымъ цѣнамъ. *A* заплатилъ 9 рублей 97 копеекъ за $7\frac{1}{2}$ фунтовъ кофе, 3 фунта сахару и $2\frac{1}{2}$ фунта чаю; *B* заплатилъ 12 рублей 78 копеекъ за 9 фунтовъ кофе, 7 фунтовъ сахару и 3 фунта чаю; *C* заплатилъ 12 рублей 12 коп. за 2 фунта кофе, $5\frac{1}{2}$ фунтовъ сахару и 4 фунта чаю. Спрашивается: что̀ стоитъ фунтъ кофе, сахару и чаю?

Отв. Фунтъ кофе стоитъ 40 коп., фунтъ сахару 24 коп., а фунтъ чаю 2 руб. 50 копеекъ.

60. Три каменьщика *A*, *B* и *C* должны вывести нѣкоторую стѣну. *A* и *B* вмѣстѣ могли бы вывести эту стѣну въ 12 дней; *B* и *C* въ 20 дней, *A* и *C* въ 15 дней. Спрашивается: во сколько времени каждый каменьщикъ выведетъ эту стѣну, работая одинъ? и во сколько дней кончатъ эту стѣну каменьщики работая всѣ вмѣстѣ?

Отв. *A* выведетъ въ 20, *B* въ 30, а *C* въ 60 дней; а всѣ три вмѣстѣ окончатъ стѣну въ 10 дней.

61. Для нѣкотораго дѣла наняли трехъ работниковъ. *A* и *B* вмѣстѣ могли бы окончить это дѣло въ *a* дней; *A* и *C* въ *b* дней; *B* и *C* въ *c* дней. Спрашивается: во сколько времени каждый изъ нихъ окончитъ это дѣло, работая одинъ?

и во сколько времени окончена будетъ работа, когда всѣ три будутъ работать вмѣстѣ?

Отв. A окончитъ въ $\frac{2abc}{bc+ac-ab}$, B въ $\frac{2abc}{bc+ab-ac}$, C въ $\frac{2abc}{ab+ac-bc}$ дней, а всѣ три вмѣстѣ окончатъ дѣло въ $\frac{2abc}{ab+ac+bc}$ дней.

62. Нѣкоторый бассейнъ можетъ быть наполненъ водою посредствомъ трехъ отверстій A, B и C. — Посредствомъ отверстій A и B бассейнъ наполняется въ 70 минутъ; посредствомъ A и C въ 84 минуты, а посредствомъ B и C въ 140 минутъ. Спрашивается: во сколько времени бассейнъ наполнится чрезъ каждое отверстіе отдѣльно и во сколько времени чрезъ всѣ отверстія вдругъ?

Отв. Чрезъ отверстіе A бассейнъ наполнится въ 105; чрезъ B въ 210, чрезъ C въ 420 минутъ, а чрезъ всѣ три отверстія вдругъ въ одинъ часъ.

Заключается ли эта послѣдняя задача въ 61-й? и какъ должно измѣнить заданіе въ 61-й задачѣ, чтобы приноровить оное къ 62-й?

63. Нѣкто имѣетъ три куска металла, изъ которыхъ каждый состоитъ изъ золота, серебра и мѣди. Первый кусокъ содержитъ 5 лотовъ золота, 15 лотовъ серебра и 30 лотовъ мѣди; второй 20 лотовъ золота, 28 лотовъ серебра и 48 лотовъ мѣди; третій 12 лотовъ золота, 39 лотовъ серебра и 24 лота мѣди. Спрашивается: сколько онъ долженъ взять отъ каждаго куска, чтобъ, сплавивъ въ одинъ, получить композицію изъ 10 лотовъ золота, 23 лотовъ серебра и 26 лотовъ мѣди?

Отв. Отъ перваго куска 10, отъ втораго 24 и отъ третьяго 25 лотовъ.

64. Три солдата *A*, *B* и *C* въ нѣкоторомъ сраженіи пріобрѣли вмѣстѣ добычи 96 рублей, которые они, по причинѣ равной опасности, которой каждый изъ нихъ подвергался, намѣрены раздѣлить поровну. На сей конецъ *A*, захватившій болѣе всѣхъ, даетъ *B* и *C* столько, сколько у обоихъ уже было; *B* точно такимъ же образомъ дѣлится съ *A* и *C*; и потомъ *C* равнымъ же образомъ дѣлится съ *A* и *B*. Каждый, сосчитавъ свою часть, нашелъ, что они дѣйствительно получили поровну. Спрашивается: сколько у каждаго изъ нихъ было до дѣлежа?

Отв. У *A* 52, у *B* 28, у *C* 16 рублей.

65. Въ трехъ ящикахъ моего бюро находится сумма 162 рубля, разложенная не поровну въ этихъ ящикахъ. Чтобы во всѣхъ ящикахъ было поровну, то я изъ перваго ящика взявъ извѣстную сумму, положилъ во второй и въ третій половину того, что въ каждомъ изъ этихъ послѣднихъ уже находилось; потомъ изъ втораго перекладываю въ первый и третій по половинѣ того, что въ нихъ находится, и наконецъ, точно такъ же поступаю, вынувъ изъ третьяго ящика; отъ этого дѣйствительно во всѣхъ ящикахъ сдѣлалось поровну. Спрашивается: сколько было сперва въ каждомъ ящикѣ?

Отв. Въ первомъ 70, во второмъ 52, въ третьемъ 40 рублей.

66. *A*, *B* и *C* играютъ въ банкъ. Въ первую игру *A* держитъ банкъ; *B* и *C* ставятъ каждый третью часть своихъ денегъ и выигрываютъ. Во вторую игру *B* держитъ банкъ; *A* и *C* ставятъ каждый третью часть своихъ денегъ и также выигрываютъ. Въ третью игру *C* держитъ банкъ; *A* и *B* ставятъ каждый третью часть своихъ денегъ, и на этотъ разъ также проигрываетъ банкиръ. Послѣ третьей игры оказалось, что всѣ они имѣютъ поровну, а именно

по 64 рубля. Спрашивается: сколько у каждаго было предъ началомъ игры?

Отв. У A 75, у B 63, у C 54 рубля.

67. A, B, C, D, E играютъ между собою въ карты съ тѣмъ условіемъ, что проигравшій долженъ каждый разъ заплатить всѣмъ столько, сколько они имѣютъ уже при себѣ. Сперва проигралъ A, потомъ B, потомъ C, потомъ D и наконецъ E. Послѣ пятой игры оказалось, что у всѣхъ было денегъ поровну, а именно по 32 рубля. Спрашивается: сколько у каждаго было до начала игры?

Отв. У A 81, у B 41, у C 21, у D 11, у E 6 рублей.

68. За отличіе, оказанное тремя полками, отпущено имъ въ награду 2652 рубля, которые должно раздѣлить такъ, чтобы каждый солдатъ изъ наиболѣе отличившагося полка получилъ по рублю; остальное же раздать людямъ двухъ прочихъ полковъ, поровну каждому. Если людямъ перваго полка дано будетъ по рублю, то каждый солдатъ двухъ прочихъ полковъ получитъ по $\frac{1}{2}$ рубля; если людямъ втораго полка дано будетъ по рублю, то каждый солдатъ двухъ прочихъ полковъ получитъ по $\frac{1}{3}$ рубля; если, наконецъ, людямъ третьяго полка дадутъ по рублю, то каждый солдатъ двухъ прочихъ полковъ получитъ только по $\frac{1}{4}$ рубля. Спрашивается: сколько солдатъ въ каждомъ полку?

Отв. Въ первомъ 780, во второмъ 1716, а въ третьемъ 2028 человѣкъ.

69. Найти три числа, имѣющія слѣдующее свойство: если первое сложимъ съ m разъ взятыми вторымъ и третьемъ числами, то сумма должна быть $= a$; если второе сложимъ съ m' разъ взятыми первымъ и третьемъ числами, то сумма должна равняться a'; если же третье сложимъ съ m'' разъ

взятыми первымъ и вторымъ числами, то сумма должна составить a''.

Отв. Полагая $\frac{m}{m-1} + \frac{m'}{m'-1} + \frac{m''}{m''-1} = A$, и $\frac{a}{m-1} + \frac{a'}{m'-1} + \frac{a''}{m''-1} = B$, искомыя три числа будутъ выражаться чрезъ: $\frac{1}{m-1}\left(\frac{mB}{A-1} - a\right)$, $\frac{1}{m'-1}\left(\frac{m'B}{A-1} - a'\right)$, $\frac{1}{m''-1}\left(\frac{m''B}{A-1} - a''\right)$, а сумма ихъ $= \frac{B}{A-1}$.

70. Чтобы сдѣлать предъидущую задачу болѣе общею, пусть, вмѣсто трехъ, требуется найти вообще нѣсколько чиселъ. Спрашивается: какими формулами въ этомъ случаѣ искомыя числа будутъ выражаться?

Отв. Пусть $\frac{m}{m-1} + \frac{m'}{m'-1} + \frac{m''}{m''-1} + \frac{m'''}{m'''-1} + \text{etc.} = A$ и $\frac{a}{m-1} + \frac{a'}{m'-1} + \frac{a''}{m''-1} + \frac{a'''}{m'''-1} + \text{etc.} = B$, то искомыя числа будутъ выражаться формулами: $\frac{1}{m-1}\left(\frac{mB}{A-1} - a\right)$, $\frac{1}{m'-1}\left(\frac{m'B}{A-1} - a'\right)$, $\frac{1}{m''-1}\left(\frac{m''B}{A-1} - a''\right)$, $\frac{1}{m'''-1}\left(\frac{m'''B}{A-1} - a'''\right)$, etc. и сумма ихъ $= \frac{B}{A-1}$.

71. Найти три числа, которыхъ бы сумма равнялась 83, и которыя имѣли бы слѣдующее свойство: если изъ перваго и втораго вычтемъ по 7, то остатки должны содержаться какъ 5 къ 3; если же изъ втораго и третьяго вычтемъ по 3, то остатки должны содержаться какъ 11 къ 9.

Отв. 37, 25, 21.

72. Найти три числа, имѣющія слѣдующее свойство: если къ первому и второму приложимъ по 6, то суммы должны содержаться какъ 2 къ 3; если къ первому и третьему приложимъ по 5, то суммы должны содержаться какъ 7 къ 11;

если же изъ втораго и третьяго вычтемъ по 36, то остатки должны содержаться какъ 6 къ 7.

Отв. 30, 48, 50.

73. Найти число, состоящее изъ трехъ цифръ, которыя находились бы въ ариѳметической пропорціи, а самое число имѣло бы слѣдующее свойство: если это число раздѣлимъ на сумму цифръ, то частное должно быть = 48; если же изъ этого искомаго числа вычтемъ 198, то чтобы цифры этой разности были тѣ же самыя, что и у искомаго числа, только въ обратномъ порядкѣ.

Отв. 432.

ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНІЙ ВТОРОЙ СТЕПЕНИ СЪ ОДНОЮ И СО МНОГИМИ НЕИЗВѢСТНЫМИ ВЕЛИЧИНАМИ.

1. Найти число, имѣющее то свойство, что если умножимъ половину этого числа на одну треть его, то произведеніе равнялось бы 864.

Отв. 72.

2. Найти такое число, что если перемножимъ между собою седьмую и восьмую части его, и произведеніе раздѣлимъ на 3, то частное было бы = $298\frac{2}{3}$.

Отв. 224.

3. Найти число, имѣющее слѣдующее свойство: если приложимъ его къ 94, и вычтемъ его изъ 94, то первая сумма, умноженная на послѣднюю разность, должна дать произведеніе = 8512.

Отв. 18.

4. Найти два числа, которыя, будучи умножены одно на другое, дали бы произведеніе = 750, а будучи раздѣлены одно на другое, дали бы частное = $3\frac{1}{3}$.

Отв. 50 и 15.

5. Найти два числа, произведеніе которыхъ равнялось бы a, а частное, происходящее отъ раздѣленія одного изъ искомыхъ чиселъ на другое, было $= b$.

Отв. $\sqrt{(ab)}$ и $\sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)}$.

6. Найти два числа такія, чтобы сумма ихъ квадратовъ равнялась 13001, а разность этихъ же квадратовъ равнялась 1449.

Отв. 85 и 76.

7. Сумма квадратовъ двухъ чиселъ $= a$, а разность этихъ же квадратовъ $= b$. Спрашивается: какъ выражаются эти числа?

Отв. $\sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)}$ и $\sqrt{\left(\frac{a-b}{2}\right)}$.

8. Найти два числа, находящіяся въ отношеніи 3 къ 4 и сумма квадратовъ которыхъ $= 324900$.

Отв. 342, 456.

9. Найти два числа, находящіяся въ отношеніи m къ n, и сумма квадратовъ которыхъ $= b$.

Отв. $\frac{m\sqrt{(b)}}{\sqrt{(m^2+n^2)}}$, $\frac{n\sqrt{(b)}}{\sqrt{(m^2+n^2)}}$.

10. Найти два числа, находящіяся въ отношеніи m въ n, и разность квадратовъ которыхъ $= b$.

Отв. $\frac{m\sqrt{(b)}}{\sqrt{(m^2-n^2)}}$, $\frac{n\sqrt{(b)}}{\sqrt{(m^2-n^2)}}$

11. Нѣкоторый капиталъ отданъ къ ростъ по 4 процента. Если число рублей капитала умножимъ на число рублей пятимѣсячныхъ процентовъ, то получимъ число $= 117041\frac{2}{3}$. Спрашивается: какъ великъ капиталъ?

Отв. 2650 рублей.

12. Нѣкто имѣетъ три различные товара, которые вмѣстѣ стоютъ 55 рублей 25 копеекъ. Фунтъ каждаго товара стоитъ столько копеекъ, сколько фунтовъ этого товара у него имѣется. Извѣстно, что товара втораго рода онъ имѣетъ одною третью болѣе, чѣмъ перваго, а товара третьяго рода въ $3\frac{1}{2}$ раза болѣе, чѣмъ втораго. Спрашивается: сколько фунтовъ онъ имѣетъ каждаго рода товара?

Отв. Перваго 15, втораго 20, третьяго 70 фунтовъ.

13. Если я за фунтъ имѣющагося у меня товара буду брать въ $2\frac{3}{5}$ раза болѣе копеекъ, чѣмъ сколько имѣю фунтовъ этого товара, то выручка такимъ же числомъ будетъ превышать 1 рубль 55 копеекъ, какимъ выручка моя была бы менѣе 1 рубля 55 копеекъ, если бы я бралъ за фунтъ вдвое менѣе копеекъ, противъ числа имѣющихся фунтовъ. Спрашивается: сколько имѣется у меня фунтовъ товара?

Отв. 10 фунтовъ.

14. Найти такое число, что если къ $2\frac{1}{3}$ его придамъ 7, эту сумму умножу на искомое число, восемь разъ взятое, произведеніе раздѣлю на 4, а изъ частнаго вычту учетверенное искомое число, то получится 2352.

Отв. 42.

15. Найти три числа, имѣющія то свойство, что произведеніе перваго на второе равняется a, перваго на третье $= b$, а сумма квадратовъ втораго и третьяго $= c$.

Отв. $\sqrt{\left(\frac{a^2+b^2}{c}\right)}$, $a\sqrt{\left(\frac{c}{a^2+b^2}\right)}$, $b\sqrt{\left(\frac{c}{a^2+b^2}\right)}$.

16 Найти три числа такія, что если произведеніе первыхъ двухъ раздѣлимъ на третье число, то получимъ частное $= a$; если произведеніе перваго на третье раздѣлимъ на второе число, то получимъ частное $= b$; наконецъ, если про-

изведеніе втораго на третье раздѣлимъ на первое, то получимъ частное $= c$?

Отв. $\sqrt{(ab)}$, $\sqrt{(ac)}$, $\sqrt{(bc)}$.

17. Найти три числа такія, что произведеніе перваго на второе $= a$, перваго на третье $= b$, а втораго на третье $= c$?

Отв. $\sqrt{\left(\frac{ab}{c}\right)}$, $\sqrt{\left(\frac{ac}{b}\right)}$, $\sqrt{\left(\frac{bc}{a}\right)}$.

18. Найти пять чиселъ такихъ, чтобы произведенія: перваго на второе было $= a$, втораго на третье $= b$, третьяго на четвертое $= c$, четвертаго на пятое $= d$ и пятаго на первое $= e$.

Отв. $\sqrt{\left(\frac{ace}{bd}\right)}$, $\sqrt{\left(\frac{abd}{ce}\right)}$, $\sqrt{\left(\frac{bce}{ad}\right)}$, $\sqrt{\left(\frac{acd}{be}\right)}$, $\sqrt{\left(\frac{bde}{ac}\right)}$.

19. Найти семь чиселъ такихъ, чтобы произведенія: перваго на второе, втораго на третье, и т. д., наконецъ седьмаго на первое равнялись по порядку числамъ a, b, c, d, e, f, g.

Отв. $\sqrt{\left(\frac{aceg}{bdf}\right)}$, $\sqrt{\left(\frac{abdf}{ceg}\right)}$, $\sqrt{\left(\frac{bceg}{adf}\right)}$, $\sqrt{\left(\frac{acdf}{beg}\right)}$, $\sqrt{\left(\frac{bdeg}{acf}\right)}$, $\sqrt{\left(\frac{acef}{bdg}\right)}$, $\sqrt{\left(\frac{bdfg}{ace}\right)}$.

Подобныя выраженія всегда можно найти въ томъ случаѣ, когда число искомыхъ будетъ нечетное, въ противномъ случаѣ, легко удостовѣриться въ томъ, что будемъ имѣть условныя уравненія между данными количествами a, b, c, d,..... Какія именно будутъ эти условныя уравненія?

20. Найти два числа такія, чтобы одно изъ нихъ было 8-ю болѣе другаго, а произведеніе искомыхъ чиселъ было $= 240$.

Отв. 12 и 20.

21. Найти два числа, которыхъ бы сумма равнялась a, а произведеніе было $= b$.

Отв. $\frac{a+\sqrt{(a^2-4b)}}{2}$, $\frac{a-\sqrt{(a^2-4b)}}{2}$.

22. Найти такое число, чтобы избытокъ квадрата онаго предъ искомымъ числомъ равнялся 306?

Отв. 18.

23. Найти число, имѣющее то свойство, что если третью и четвертую части онаго перемножимъ между собою и къ этому произведенію придадимъ искомое число пять разъ взятое, то сумма эта такимъ числомъ будетъ болѣе 200, какимъ искомое число менѣе 280.

Отв. 48.

24. Одного человѣка спросили, сколько ему лѣтъ; на что онъ отвѣчалъ: я родился, когда матери моей было 20 лѣтъ отъ-роду. Теперь же произведеніе ея лѣтъ на мои лѣта превышаетъ сумму нашихъ лѣтъ числомъ 2500. Спрашивается: сколько ему лѣтъ отъ-роду?

Отв. 42 года.

25. Одинъ купецъ имѣетъ нѣкоторое число фунтовъ чаю двухъ сортовъ. Число фунтовъ перваго сорта относится къ числу фунтовъ втораго какъ 4 къ 3. Фунтъ перваго сорта чаю стоитъ вполовину столько рублей, сколько у купца находится фунтовъ чаю; а фунтъ втораго сорта стоитъ 6 рублями дешевле фунта перваго. Цѣна всего чаю, имѣющагося у купца, равняется 1220 рублямъ. Спрашивается: сколько у него фунтовъ каждаго сорта чаю?

Отв. Перваго сорта 40, а втораго 30 фунтовъ.

26. Одинъ купецъ имѣетъ три куска сукна; во второмъ изъ нихъ 3, а въ третьемъ 5 аршинами болѣе, чѣмъ въ первомъ. Аршинъ перваго куска стоитъ столько рублей, сколько въ этомъ кускѣ аршинъ; аршинъ втораго куска 5, а аршинъ третьяго 10 рублями дороже, чѣмъ аршинъ перваго куска. Все сукно стоитъ 1085 рублей. Спрашивается: сколько аршинъ въ первомъ кускѣ?

Отв. 15 аршинъ.

27. Найти, сколько денегъ имѣютъ три особы A, B и C. Извѣстно, что у A столько разъ 5 рублей, сколько разъ у B 9, а у C 10 рублей. Если число рублей A умножимъ на число рублей B, а число рублей B, на число рублей C, то сумма этихъ произведеній, сложенная съ деньгами A, B и C составитъ 8832 рубля. Спрашивается: сколько денегъ у каждаго изъ нихъ?

Отв. У A 40, B 72, у C 80 рублей.

28. Нѣкто купилъ нѣсколько платковъ одинаковой цѣны за 60 рублей. Еслибъ ему прибавили еще 3 платка за ту же сумму, то каждый платокъ обошелся бы ему рублемъ дешевле. Спрашивается: сколько платковъ онъ купилъ?

Отв. 12.

29. Нѣкто выдалъ на нѣкоторое число нищихъ 36 рублей; но какъ четверо изъ числа нищихъ не нуждались болѣе въ помощи, то на каждаго изъ остальныхъ досталось по 10 копеекъ болѣе. Спрашивается первоначальное число нищихъ?

Отв. 40.

30. Нѣкто, умирая, оставилъ нѣсколько дѣтей и капиталъ въ 46800 рублей, который, по завѣщанію его, должно раздѣлить между всѣми дѣтьми поровну. Но немедленно послѣ смерти отца умерли также и двое дѣтей, чрезъ что на каждаго изъ остальныхъ досталось 1950 рублями болѣе. Спрашивается: сколько онъ, умирая, оставлялъ дѣтей?

Отв. 8 дѣтей.

31. Найти число, имѣющее то свойство, что если данное количество c раздѣлимъ на это искомое число, и потомъ это

же c на другое число количествомъ a большее искомаго, то разность этихъ двухъ частныхъ была бы $= d$.

Отв. $-\frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a^2}{4} + \frac{ac}{d}\right)}$.

Заключаются ли 28, 29 и 30-я задачи въ этой послѣдней?

32. Общество состоящее изъ 20 особъ, мужчинъ и женщинъ, издержало 48 рублей, а именно: мужчины 24 рубля и женщины 24 рубля. При повѣркѣ счета оказалось, что каждый мужчина долженъ былъ заплатить 1 рублемъ болѣе каждой женщины. Спрашивается: сколько было въ этомъ обществѣ мужчинъ?

Отв. 8.

33. Нѣкто купилъ за нѣкоторую сумму лошадь, и продалъ ее потомъ за 144 рубля; при этой продажѣ барышъ его составлялъ такую сумму, которую бы онъ выручилъ въ одинъ годъ, отдавая заплаченныя имъ за лошадь деньги, по процентамъ, равняющимся этой заплаченной имъ суммѣ. Спрашивается: чего ему стоила лошадь?

Отв. 80 рублей.

34. Одинъ купецъ выписалъ кусокъ нѣкоторой матеріи и, сверхъ суммы, заплаченной имъ за эту матерію на мѣстѣ, долженъ былъ еще заплатить 4 процента за перевозъ. Онъ продалъ матерію за 390 рублей, и выручилъ при этомъ такіе проценты на заплаченную сумму, какіе составляетъ двѣнадцатая часть заплаченной имъ суммы на сто. Спрашивается: сколько онъ заплатилъ за матерію?

Отв. 300 рублей.

35. Двѣ крестьянки принесли на рынокъ вмѣстѣ 140 яицъ, и несмотря на то, что у одной изъ нихъ яицъ было болѣе, чѣмъ у другой, онѣ выручили поровну. Когда бы у меня были твои яица, сказала первая крестьянка, и я ихъ продавала бы по моей цѣнѣ, то выручила бы 1 рубль 80 копеекъ. А

когда бы у меня были твои яица, отвѣчала вторая крестьянка, и я ихъ продавала бы по моей цѣнѣ, то выручила бы 3 рубля 20 копеекъ. Спрашивается: сколько яицъ каждая изъ нихъ принесла на рынокъ?

Отв. Первая крестьянка 80, а вторая 60.

36. Два купца продали нѣкоторое число аршинъ извѣстной матеріи, но одинъ изъ нихъ продалъ 3 аршинами менѣе другаго, и они выручили вмѣстѣ 35 рублей. За твою матерію, сказалъ первый, я бы, продавая по моей цѣнѣ, выручилъ 24 рубля. А я, отвѣчалъ второй, за твою матерію, продавая ее по моей цѣнѣ, выручилъ бы только $12\frac{1}{2}$ рублей. Спрашивается: сколько аршинъ было у каждаго?

Отв. У перваго 15, а у втораго 18; или у перваго 5, а у втораго 8 аршинъ.

37. Два путешественника A и B отправились въ одно время изъ двухъ мѣстъ C и D; A изъ C въ D, а B изъ D въ C. Встрѣтившись на дорогѣ, они изъ разговоровъ узнали, что A уже прошелъ 30 милями болѣе, чѣмъ B, и что принимая въ соображеніе скорости ихъ хода, A въ 4 дня достигнетъ мѣста D, а B въ 9 дней придетъ въ мѣсто C. Спрашивается: какъ велико разстояніе между C и D?

Отв. 150 миль.

38. Пусть въ предъидущей задачѣ A пройдетъ d милями болѣе, чѣмъ B; пусть a будетъ время, которое употребитъ A, чтобы достигнуть до мѣста D, а b время которое употребитъ B, чтобы дойти до мѣста C. Найти выраженіе для разстоянія между C и D.

Отв. $\frac{d\,[\sqrt{(b)} + \sqrt{(a)}]}{\sqrt{(b)} - \sqrt{(a)}}$.

39. Два купца положили вмѣстѣ 500 рублей для общаго торга; одинъ изъ нихъ оставилъ въ торгу свой капиталъ 5 мѣсяцевъ, а другой 2 мѣсяца, и по окончаніи торга каждый

изъ нихъ получилъ по 450 рублей. Спрашивается: сколько каждый внесъ?

Отв. Одинъ 200, а другой 300 рублей.

40. Двое положили въ торгъ вмѣстѣ 2000 рублей. Одинъ изъ нихъ оставилъ свой капиталъ 17 мѣсяцевъ и получилъ 1700 рублей, а другой оставилъ свой капиталъ 12 мѣсяцевъ и получилъ 1040 рублей. Спрашивается: сколько внесъ каждый изъ нихъ?

Отв. Одинъ 1200, а другой 800 рублей.

41. Найти такія два числа, чтобы сумма ихъ равнялась 41, а сумма квадратовъ 901.

Отв. 15 и 26.

42. Найти такія два числа, чтобы сумма ихъ была равна a, а сумма квадратовъ b (*).

Отв. $\frac{a + \sqrt{(2b - a^2)}}{2}$ и $\frac{a - \sqrt{(2b - a^2)}}{2}$.

Въ какомъ случаѣ эти выраженія обратятся въ мнимыя?

43. Найти такія два числа, чтобы разность ихъ равнялась 8, а сумма квадратовъ 544.

Отв. 12 и 20.

44. Найти такія два числа, чтобы произведеніе ихъ равнялось 255, а сумма квадратовъ 514.

Отв. 15 и 17.

45. Разложить 16 на такія двѣ части, чтобы произведеніе этихъ частей, сложенное съ квадратами ихъ, составило 208.

Отв. 4 и 12.

(*) Здѣсь я ограничусь немногими общими задачами такого рода, ибо онѣ всегда легко приводятся къ такимъ уравненіямъ, примѣры которыхъ уже въ достаточномъ числѣ были помѣщены на страницахъ 133 — 138, II отд.

46. Разложить 39 на такія двѣ части, чтобы сумма кубовъ частей этихъ составляла 17199.

Отв. 15 и 24.

47. У одного человѣка спросили, сколько онъ получаетъ жалованья. Онъ отвѣчалъ: если я къ моему жалованью придамъ 1578 рублей, а потомъ вычту изъ него 142 рубля, и изъ полученныхъ такимъ образомъ чиселъ извлеку кубическіе корни, то разность этихъ кубическихъ корней будетъ равняться 10. Спрашивается: сколько онъ получалъ жалованья?

Отв. 150 рублей.

48. Найти число, которое, будучи сложено съ квадратнымъ корнемъ изъ него, давало бы 1332.

Отв. 1296.

49. Найти число, превышающее корень квадратный изъ него $48\frac{3}{4}$.

Отв. $56\frac{1}{4}$.

50. Даны два числа a и b; разложить каждое изъ нихъ на такія двѣ части, чтобы первая часть числа a содержалась къ первой части числа b какъ m къ n, и чтобъ произведеніе двухъ вторыхъ частей равнялось p.

Отв. Пусть $\frac{na + mb \pm \sqrt{[(na-mb)^2+4mnp)]}}{2mn} = A$, то первая часть числа a будетъ $= mA$, а первая часть числа b будетъ $= nA$.

51. Пусть, подобно тому, какъ въ предъидущей задачѣ, требуется числа a и b разложить такъ, чтобы первыя части находились въ отношеніи m къ n, а сумма квадратовъ вторыхъ частей равнялась бы s.

Отв. Полагая $\frac{am + bn \pm \sqrt{[(m^2 + n^2)\, s-(an=bm)^2]}}{m^2 + n^2} = A$, первая часть числа a будетъ равняться mA, а первая часть числа b будетъ равняться nA.

52. Найти такія два числа, чтобы разность ихъ, сложенная съ разностью квадратовъ этихъ самыхъ искомыхъ чиселъ, составляла 150; а сумма чиселъ, сложенная съ суммою квадратовъ ихъ составляла 330.

Отв. 9 и 15.

53. Найти такія два числа, чтобы сумма, произведеніе и разность квадратовъ ихъ были бы равны между собою.

Отв. $\frac{3 \pm \sqrt{(5)}}{2}$ и $\frac{1 \pm \sqrt{(5)}}{2}$.

54. Найти три числа, находящіяся въ геометрической непрерывной пропорціи; если сложимъ ихъ, то сумма должна равняться 126; если же перемножимъ ихъ, то произведеніе должно быть = 13824.

Отв. 6, 24, 96.

55. Найти число, которое состояло бы изъ 3 цифръ и имѣло то свойство, что сумма квадратовъ этихъ трехъ цифръ равнялась бы 104, чтобы квадратъ средней цифры 4 превышалъ удвоенное произведеніе двухъ крайнихъ цифръ, и если изъ искомаго числа вычтемъ 594, то разность была бы число, имѣющее тѣ же цифры, что и искомое число, но только въ обратномъ порядкѣ.

Отв. 862.

. . . . . .

Не всегда должно тѣ величины, которыя требуется опредѣлить, вводить въ вычисленіе какъ извѣстныя; въ противномъ случаѣ, могли бы иногда получить уравненія, которыхъ степень превышала бы степень того уравненія, отъ котораго собственно зависитъ рѣшеніе задачи, чего должно избѣгать повозможности. Часто бываетъ гораздо выгоднѣе предварительно опредѣлять какое-нибудь *соединеніе* извѣстныхъ, напримѣръ: сумму, разность, произведеніе, сумму

квадратовъ, разность квадратовъ, и проч., а потомъ уже находить и самыя неизвѣстныя величины. Такъ-какъ выборъ этотъ неизвѣстныхъ весьма важенъ въ алгебрѣ и требуетъ большаго навыка, то я и привожу вслѣдъ за этимъ довольно большое число подобныхъ задачъ; а далѣ встрѣтится таковыхъ еще болѣе.

. . . . . .

56. Найти два числа, которыхъ бы разность, умноженная на разность квадратовъ этихъ же искомыхъ чиселъ, равнялась 160, а сумма, умноженная на сумму квадратовъ 580.

Отв. Сумма искомыхъ чиселъ $= 10$, а произведеніе ихъ $= 21$; слѣдовательно искомыя числа суть 3 и 7.

57. Найти два числа такія, чтобы сумма и произведеніе ихъ чиселъ, взятыя вмѣстѣ, составляли 34, а сумма квадратовъ искомыхъ чиселъ превышала сумму самыхъ чиселъ 42.

Отв. Сумма искомыхъ чиселъ $= 10$, а произведеніе ихъ $= 24$; слѣдовательно искомыя числа суть 4 и 6.

58. Чтобы сдѣлать предъидущую задачу болѣе общею, пусть вмѣсто числа 34 дано будетъ количество a, а вмѣсто числа 42 дано будетъ количество b. Спрашивается: какъ въ этомъ случаѣ будутъ выражаться искомыя числа?

Отв. Полагая $-1 \pm \sqrt{(4b + 8a + 1)} = 2A$, $2a + 1 \pm \sqrt{(4b + 8a + 1)} = 2B$, искомыя числа будутъ: $\frac{A + \sqrt{(A^2 - 4B)}}{2}$ и $\frac{A - \sqrt{(A^2 - 4B)}}{2}$.

59. Найти два числа такія, чтобы сумма ихъ равнялась a, а сумма 4-хъ степеней ихъ b.

Отв. Пусть разность искомыхъ чиселъ $= d$, то $d = \sqrt{[-3a^2 \pm \sqrt{(8a^4 + 8b)}]}$; искомыя же числа суть $\frac{a + d}{2}$ и $\frac{a - d}{2}$.

60. Найти два числа такія, чтобы сумма ихъ равнялась a, а сумма 5-хъ степеней ихъ была $= b$.

Отв. Произведеніе p искомыхъ чиселъ $= \frac{1}{2}\left[a^2 \pm \sqrt{\left(\frac{a^5+4b}{5a}\right)}\right]$; искомыя же числа суть: $\frac{1}{2}\left[a + \sqrt{(a^2 - 4p)}\right]$ и $\frac{1}{2}\left[a - \sqrt{(a^2 - 4p)}\right]$.

61. Найти два числа такія, чтобы сумма ихъ равнялась a, а произведеніе ихъ, умноженное на сумму квадратовъ искомыхъ чиселъ, было $= b$.

Отв. Полагая произведеніе искомыхъ чиселъ $= p$, будетъ $p = \frac{1}{4}\left[a^2 \pm \sqrt{(a^4 - 8b)}\right]$; искомыя же числа суть: $\frac{1}{2}\left[a + \sqrt{(a^2 - 4p)}\right]$ и $\frac{1}{2}\left[a - \sqrt{(a^2 - 4p)}\right]$.

62. Найти два числа такія, чтобы сумма ихъ, сложенная съ суммою ихъ квадратовъ, равнялась a; а m разъ взятая сумма квадратовъ искомыхъ чиселъ вмѣстѣ съ n разъ взятымъ произведеніемъ ихъ, была $= b$.

Отв. Сумма s и произведеніе p искомыхъ чиселъ могутъ быть опредѣлены изъ уравненій: $ns^2 + (n - 2m)\,s = 2b + (n - 2m)\,a$ и $2p = s^2 + s - a$. Опредѣливъ изъ нихъ s и p, самыя искомыя числа найдутся, рѣшивъ уравненіе $x^2 - sx + p = 0$. Слѣдовательно каждое искомое имѣетъ 4 величины.

63. Найти такую геометрическую пропорцію, чтобы сумма среднихъ членовъ ея равнялась a, сумма крайнихъ членовъ была $= b$, а сумма квадратовъ всѣхъ четырехъ членовъ была $= c$.

Отв. Произведеніе среднихъ членовъ, а слѣдовательно и произведеніе крайнихъ членовъ $= \frac{a^2 + b^2 - c}{4}$; а искомая пропорція есть: $\frac{1}{2}\left[b - \sqrt{(c - a^2)}\right] : \frac{1}{2}\left[a - \sqrt{(c - b^2)}\right] = \frac{1}{2}\left[a + \sqrt{(c - b^2)}\right] : \frac{1}{2}\left[b + \sqrt{(c - a^2)}\right]$.

64. Найти такую геометрическую пропорцію, чтобы сумма среднихъ членовъ ея равнялась a, разность крайнихъ членовъ была $= b$, а сумма квадратовъ всѣхъ четырехъ членовъ $= c$.

Отв. Произведеніе крайнихъ или среднихъ членовъ искомой пропорціи $= \frac{c - a^2 - b^2}{4}$, а самая пропорція есть слѣдующая:

$$\tfrac{1}{2}\left[-b + \sqrt{(c - a^2)}\right] : \tfrac{1}{2}\left[-a + \sqrt{(c - b^2)}\right] =$$
$$\tfrac{1}{2}\left[+a + \sqrt{(c - b^2)}\right] : \tfrac{1}{2}\left[+b + \sqrt{(c - a^2)}\right].$$

65. Найти такую геометрическую пропорцію, чтобы произведеніе крайнихъ или среднихъ членовъ ея равнялось a, сумма всѣхъ четырехъ членовъ была $= b$, а сумма квадратовъ всѣхъ четырехъ членовъ $= c$.

Отв. Полагая, для краткости, $\pm\sqrt{(8a + 2c - b^2)} = A$ сумма среднихъ членовъ искомой пропорціи будетъ $= \frac{b - A}{2}$, а сумма крайнихъ членовъ ея будетъ $= \frac{b + A}{2}$, самая же искомая пропорція есть:

$$\tfrac{1}{4}\left[b + A - \sqrt{(2c - 8a + 2bA)}\right] : \tfrac{1}{4}\left[b - A - \sqrt{(2c - 8a - 2bA)}\right]$$
$$= \tfrac{1}{4}\left[b - A + \sqrt{(2c - 8a - 2bA)}\right] :$$
$$\tfrac{1}{4}\left[b + A + \sqrt{(2c - 8a + 2bA)}\right].$$

66. Найти такую геометрическую пропорцію, чтобы произведеніе крайнихъ или среднихъ членовъ ея равнялось a, разность между суммою крайнихъ и суммою среднихъ членовъ была $= b$, а сумма квадратовъ всѣхъ четырехъ членовъ равнялась c.

Отв. Полагая $\pm\sqrt{(8a + 2c - b^2)} = A$, сумма среднихъ членовъ будетъ $= \frac{A - b}{2}$, а сумма крайнихъ $= \frac{A + b}{2}$, искомая же пропорція есть:

$$\tfrac{1}{4}\left[A + b - \sqrt{(2c - 8a + 2bA)}\right] : \tfrac{1}{4}\left[A - b - \sqrt{(2c - 8a - 2bA)}\right]$$
$$= \tfrac{1}{4}\left[A - b + \sqrt{(2c - 8a - 2bA)}\right] :$$
$$\tfrac{1}{4}\left[A + b + \sqrt{(2c - 8a + 2bA)}\right].$$

Полагая $a = 18$, $b = 2$, $c = 130$, будетъ $2 : 3 = 6 : 9$.
Полагая $a = 270$, $b = 20$, $c = 3922$, будетъ $5 : 9 = 30 : 54$.

67. Найти такую геометрическую пропорцію, чтобы произведеніе крайнихъ или среднихъ членовъ равнялось a, сумма всѣхъ членовъ была $= b$, а разность между суммою квадратовъ крайнихъ и суммою квадратовъ среднихъ членовъ $= c$.

Отв. Сумма среднихъ членовъ искомой пропорціи $= \frac{b^2 - c}{2b}$, слѣдовательно сумма крайнихъ $= \frac{b^2 + c}{2b}$, искомая же пропорція есть:

$$\frac{b^2 + c - \sqrt{[(b^2 + c)^2 - 16ab^2]}}{4b} : \frac{b^2 - c - \sqrt{[(b^2 - c)^2 - 16ab^2]}}{4b}$$

$$= \frac{b^2 - c + \sqrt{[(b^2 - c)^2 - 16ab^2]}}{4b} : \frac{b^2 + c + \sqrt{[(b^2 + c)^2 - 16ab^2]}}{4b}$$

68. Найти такую непрерывную геометрическую пропорцію, чтобы сумма всѣхъ трехъ членовъ ея равнялась a, а сумма квадратовъ трехъ членовъ была бы $= b$.

Отв. Средній членъ искомой пропорціи $= \frac{a^2 - b}{2a}$, слѣдовательно крайніе члены ея суть:

$$\frac{a^2 + b - \sqrt{(3b - a^2)(3a^2 - b)}}{4a} \text{ и } \frac{a^2 + b + \sqrt{(3b - a^2)(3a^2 - b)}}{4a}.$$

Между какими предѣлами должно заключаться количество b, чтобы задача эта была возможна?

69. Найти такую непрерывную геометрическую пропорцію, чтобы сумма всѣхъ трехъ членовъ ея равнялась a, а разность между суммою квадратовъ крайнихъ членовъ и квадратомъ средняго члена была $= b$.

Отв. Называя средній членъ искомой пропорціи чрезъ g, будетъ $g = \frac{-a \pm \sqrt{(3a^2 - 2b)}}{2}$; отсюда получимъ, что край-

ніе члены суть: $\frac{1}{2}\left[a - g \pm \sqrt{(a^2 - 2ag - 3g^2)}\right]$ и $\frac{1}{2}\left[a - g \pm \sqrt{(a^2 - 2ag - 3g^2)}\right]$.

70. Найти геометрическую прогресію такую, чтобы сумма первыхъ четырехъ членовъ ея равнялась a, а сумма квадратовъ этихъ четырехъ членовъ была $= b$.

Отв. Полагая что s изображаетъ полусумму, а d полуразность двухъ среднихъ членовъ будемъ имѣть:

$s = \frac{-b \pm \sqrt{[b^2 + 2a^2(a^2 - b)]}}{4a}$ и $d = s\sqrt{\left(\frac{a - 4s}{a + 4s}\right)}$, отсюда получаемъ два средніе члена $s - d$ и $s + d$, и два крайніе члена $\frac{(s-d)^2}{s+d}$ и $\frac{(s+d)^2}{s-d}$.

71. Найти первые четыре члена такой геометрической прогресіи, въ которой бы разность между суммою двухъ крайнихъ и суммою двухъ среднихъ членовъ равнялась a, а разность между суммою квадратовъ двухъ крайнихъ и суммою квадратовъ двухъ среднихъ членовъ была $= b$.

Отв. Означая чрезъ s полусумму двухъ среднихъ членовъ, а чрезъ d полуразность ихъ, будемъ имѣть $s = \frac{b - a^2}{4a}$ и $d = \frac{b - a^2}{4\sqrt{(2b - a^2)}}$; посредствомъ этихъ выраженій опредѣлимъ средніе члены $s - d$ и $s + d$, и крайніе члены $\frac{(s-d)^2}{s+d}$ и $\frac{(s+d)^2}{s-d}$.

72. Найти первые четыре члена такой геометрической прогресіи, въ которой бы разность между суммою втораго и четвертаго и суммою перваго и третьяго членовъ равнялась a, а сумма квадратовъ всѣхъ четырехъ членовъ была $= b$.

Отв. Изображая полуразность среднихъ членовъ чрезъ d, а полусумму ихъ чрезъ s, будемъ имѣть $d = \frac{b \pm \sqrt{[b^2 + 2a^2(a^2 - b)]}}{4a}$

и $s = d\sqrt{\left(\frac{a+4d}{a-4d}\right)}$; посредствомъ этихъ выраженій опредѣлятся средніе и крайніе члены подобно тому, какъ въ двухъ предъидущихъ задачахъ.

73. Найти первые четыре члена такой геометрической прогресіи, въ которой бы сумма всѣхъ членовъ была $= a$, а разность между суммою квадратовъ крайнихъ и суммою квадратовъ среднихъ членовъ была $= b$.

Отв. Полусумма среднихъ членовъ $s = \frac{a^2 - b}{4a}$, полуразность ихъ $d = \pm s\sqrt{\left(\frac{b}{8as + b}\right)}$; прочія же искомыя величины опредѣляются какъ въ предъидущихъ трехъ задачахъ.

74. Найти первые четыре члена такой геометрической прогресіи, въ которой бы сумма двухъ крайнихъ членовъ $= a$, а сумма двухъ среднихъ была $= b$.

Отв. Означая знаменателя прогресіи чрезъ e, будемъ имѣть $e = \frac{a + b \pm \sqrt{(a-b)(a+3b)}}{4b}$; а первый членъ $= \frac{a}{e^3 + 1} = \frac{b}{e^2 + e}$.

75. Найти такую геометрическую пропорцію, чтобы сумма среднихъ членовъ ея была $= a$, сумма крайнихъ $= b$, а сумма кубовъ всѣхъ четырехъ членовъ $= c$.

Отв. Означая чрезъ p произведеніе среднихъ или крайнихъ членовъ, будетъ $p = \frac{a^3 + b^3 - c}{3(a+b)}$; искомая же пропорція есть слѣдующая:

$$\tfrac{1}{2}\left[b - \sqrt{(b^2 - 4p)}\right] : \tfrac{1}{2}\left[a - \sqrt{(a^2 - 4p)}\right]$$
$$= \tfrac{1}{2}\left[a + \sqrt{(a^2 - 4p)}\right] : \tfrac{1}{2}\left[b + \sqrt{(b^2 - 4p)}\right].$$

76. Найти такую геометрическую пропорцію, чтобы сумма всѣхъ членовъ ея $= a$, сумма квадратовъ всѣхъ членовъ была $= b$, а сумма кубовъ всѣхъ членовъ $= c$.

Отв. Означая произведеніе среднихъ или крайнихъ членовъ чрезъ p, будемъ имѣть $p = \frac{a^3 - 3ab + 2c}{6a}$, а разность между суммою крайнихъ и суммою среднихъ членовъ означивъ чрезъ d, получимъ: $d = \pm \sqrt{\left(\frac{a^3 - 6ab + 8c}{3a}\right)}$; слѣдовательно сумма крайнихъ $= \frac{a + d}{2}$, сумма среднихъ $= \frac{a - d}{2}$, а искомая пропорція будетъ слѣдующая:

$$\tfrac{1}{4}[a + d - \sqrt{((a+d)^2 - 16p)}] : \tfrac{1}{4}[a - d - \sqrt{((a-d)^2 - 16p)}]$$
$$= \tfrac{1}{4}[a - d + \sqrt{((a-d)^2 - 16p)}] : \tfrac{1}{4}[a + d + \sqrt{((a+d)^2 - 16p)}].$$

77. Найти такую геометрическую пропорцію, чтобы разность между суммою крайнихъ и суммою среднихъ членовъ равнялась a, разность между суммою квадратовъ крайнихъ и суммою квадратовъ среднихъ была $= b$, а разность между суммою кубовъ крайнихъ и суммою кубовъ среднихъ $= c$.

Отв. Сумма всѣхъ членовъ $= \frac{b}{a}$, слѣдовательно сумма крайнихъ членовъ $s = \frac{b + a^2}{2a}$, сумма среднихъ $s' = \frac{b - a^2}{2a}$, произведеніе крайнихъ или среднихъ членовъ $p = \frac{a^4 + 3b^2 - 4ac}{12a^2}$. Опредѣливъ такимъ образомъ s, s', и p, искомая пропорція будетъ слѣдующая:

$$\tfrac{1}{2}[s - \sqrt{(s^2 - 4p)}] : \tfrac{1}{2}[s' - \sqrt{(s'^2 - 4p)}]$$
$$= \tfrac{1}{2}[s' + \sqrt{(s'^2 - 4p)}] : \tfrac{1}{2}[s + \sqrt{(s^2 - 4p)}].$$

78. Найти такую геометрическую пропорцію, чтобы произведеніе крайнихъ или среднихъ членовъ равнялось a, сумма всѣхъ четырехъ членовъ была $= b$, а сумма кубовъ всѣхъ членовъ $= c$.

Отв. Полагая, для краткости, $\pm \sqrt{\left(\frac{4c + 12ab - b^3}{3b}\right)} = A$, сумма крайнихъ членовъ выразится чрезъ $\frac{b + A}{2}$, а сумма среднихъ чрезъ $\frac{b - A}{2}$; искомая же пропорція будетъ:

$$\tfrac{1}{4}[b+A-\sqrt{((b+A(^2-16a)}] : \tfrac{1}{4}[b-A-\sqrt{((b-A)^2-16a)}] = \tfrac{1}{4}[b-A+\sqrt{((b-A(^2-16a)}] : \tfrac{1}{4}[b+A+\sqrt{((b-A)^2-16a)}].$$

79. Найти такую геометрическую пропорцію, чтобы сумма двухъ крайнихъ членовъ равнялась a, сумма двухъ среднихъ была $= b$, а сумма кубовъ всѣхъ четырехъ членовъ $= c$.

Отв. Полагая, для краткости, $\sqrt{\left(\frac{4c - a^3 - 4b^3 + 3a^2b}{3(a + b)}\right)} = A$, $\sqrt{\left(\frac{4c - 4a^3 - b^3 + 3ab^2}{3(a + b)}\right)} = B$, искомая пропорція будетъ:

$$\frac{a - A}{2} : \frac{b - B}{2} = \frac{b + B}{2} : \frac{a + A}{2}.$$

80. Какимъ образомъ рѣшаются, въ отношеніи къ x' и x'', нижеслѣдующія два уравненія? $(x' + x'')(1 + x'x'' + x'^2x'' + x'x''^2 + x'x''^2) + x'x'' = a$. $x'x''(x' + x'')(x' + x'' + x'x'')(x' + x'' + x'x'' + x'^2x'' + x'x''^2) = b$.

Отв. Полагая постепенно въ этихъ уравненіяхъ: $x' + x'' = y'$; $x'x'' = y''$; $y' + y'' = z'$; $y'y'' = z''$; $z' + z'' = w'$; $z'z'' = w''$; найдемъ окончательно $w' + w'' = a$; $w'w'' = b$. Искомыя же величины x' и x'' опредѣлятся посредствомъ нижеслѣдующихъ четырехъ уравненій второй степени:

$$w^2 - aw + b = 0, \qquad z^2 - w'z + w'' = 0,$$
$$y^2 - z'y + z'' = 0, \qquad x^2 - y'x + y'' = 0.$$

Изъ перваго выводятся w' и w'', изъ втораго z' и z'', изъ третьяго y' и y'', и наконецъ изъ четвертаго x' и x''. Такимъ образомъ получимъ послѣдовательно:

$$w' = \frac{a \pm \sqrt{(a^2 - 4b)}}{2}, \quad w'' = \frac{a \mp \sqrt{(a^2 - 4b)}}{2},$$

$$z' = \frac{w' \pm \sqrt{(w'^2 - 4w'')}}{2}, \quad z'' = \frac{w' \mp \sqrt{(w'^2 - 4w'')}}{2},$$

$$y' = \frac{z' \pm \sqrt{(z'^2 - 4z'')}}{2}, \quad y'' = \frac{z' \mp \sqrt{(z'^2 - 4z'')}}{2},$$

$$x' = \frac{y' \pm \sqrt{(y'^2 - 4y'')}}{2}, \quad x'' = \frac{y' \mp \sqrt{(y'^2 - 4y'')}}{2},$$

а слѣдовательно каждое изъ количествъ x' и x'' будетъ имѣть 16 различныхъ величинъ.

Еслибъ для рѣшенія двухъ предложенныхъ уравненій употребили общій *способъ исключенія* (Théorie de l'Elimination), то, послѣ довольно-сложныхъ выкладокъ, были бы приведены къ уравненію 16-й степени.

ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНІЙ ВЫСШИХЪ СТЕПЕНЕЙ.

1. Найти такое число, чтобы одна треть его, умноженная на квадратъ этого же искомаго числа, давала 1944.

Отв. 18.

2. Найти такое число, чтобы произведеніе половины, трети и четверти его, увеличенное 32, равнялось 4640.

Отв. 48.

3. Найти число, имѣющее то свойство, что если четвертую степень его раздѣлимъ на восьмую часть этого же числа и изъ частнаго вычтемъ 167, то остатокъ долженъ равняться 12000.

Отв. $11\frac{1}{2}$.

4. Нѣкто купилъ нѣкоторое число лимоновъ, которые уложены въ ящикахъ; извѣстно, что въ каждомъ ящикѣ находится лимоновъ въ 48 разъ болѣе противъ числа ящиковъ; за каждый лимонъ онъ заплатилъ вдвое болѣе денежекъ противъ числа ящиковъ, а за всѣ лимоны 17 рублей 28 копеекъ. Спрашивается: сколько онъ купилъ лимоновъ.

Отв. 288.

5. Нѣсколько купцовъ сложились для общаго торга; каждый изъ нихъ внесъ въ 1000 разъ болѣе рублей противъ числа купцовъ. По окончаніи торга они пріобрѣли барыша 2560 рублей, и по разсчету оказалось, что они получили на свои капиталы проценты, составляющіе половину числа сложившихся купцовъ. Спрашивается: сколько было купцовъ?

Отв. 8.

6. Одинъ капиталистъ отдалъ въ ростъ 10000 рублей и ежегодно оставляетъ проценты для увеличенія капитала. По прошествіи трехъ лѣтъ капиталъ его сдѣлался $= 11576\frac{1}{4}$ рублямъ. Спрашивается: какъ велики были ежегодные проценты, имъ получаемые?

Отв. 5.

7. Найти три числа, которыя бы имѣли слѣдующее свойство: если квадратъ перваго числа умножимъ на второе, то произведеніе должно равняться 112; если квадратъ втораго числа умножимъ на третье, то произведеніе должно быть $=$ 588, если же квадратъ третьяго числа умножимъ на первое, то должны получить 576.

Отв. 4, 7, 12.

8. Найти три числа, имѣющія то свойство, чтобы произведеніе квадрата перваго числа на второе равнялось a, про-

изведеніе квадрата втораго на третье было $= b$, а произведеніе квадрата третьяго на первое $= c$?

Отв. $\sqrt[9]{\left(\frac{a^4c}{b^2}\right)}, \sqrt[9]{\left(\frac{b^4a}{c^2}\right)}, \sqrt[9]{\left(\frac{^4b}{a^2}\right)}$.

9. Если же требуется найти четыре числа, которыя бы имѣли то свойство, чтобы произведенія квадрата перваго числа на второе было $= a$, квадрата втораго числа на третье $= b$, квадрата третьяго числа на четвертое $= c$, и наконецъ, квадрата четвертаго на первое $= d$; то спрашивается: какъ въ этомъ случаѣ будутъ выражаться искомыя числа?

Отв. $\sqrt[15]{\left(\frac{a^8c^2}{b^4d}\right)}, \sqrt[15]{\left(\frac{b^8d^2}{c^4a}\right)}, \sqrt[15]{\left(\frac{c^8a^2}{d^4b}\right)}, \sqrt[15]{\left(\frac{d^8b^2}{a^4c}\right)}$.

Подобныя выраженія можно найти для пяти, шести и болѣе чиселъ; и задачъ эту можно представить еще въ болѣе общемъ видѣ, что̀ предоставляется самому читателю.

10. Нѣкто изъ бочки, содержащей 81 ведро вина, отлилъ нѣкоторое число ведеръ, а бочку долилъ водою; потомъ отъ этой смѣси онъ отлилъ столько же ведеръ, сколько и въ первый разъ и опять бочку долилъ водою, сдѣлалъ это 4 раза, въ бочкѣ осталось только 16 ведеръ чистаго вина, остальное же число ведеръ была вода. Спрашивается: по скольку ведеръ онъ отливалъ каждый разъ?

Отв. По 27 ведеръ.

11. Найти такія два числа, чтобы разность ихъ равнялась 4, а произведеніе искомыхъ чиселъ, будучи умножено на сумму ихъ же, было бы $= 1386$.

Отв. 7 и 11.

12. Нѣкто купилъ серебряный сосудъ, который вѣситъ столько же фунтовъ, сколько одинъ фунтъ содержитъ въ себѣ лотовъ чистаго серебра. За этотъ сосудъ онъ заплатилъ 120 рублей. Еслибъ онъ платилъ за каждый фунтъ сосуда по 20 копеекъ, то цѣна всего сосуда превышала бы цѣну каж-

даго лота чистаго серебра, содержащагося въ сосудѣ 80 копейками. Спрашивается вѣсъ сосуда.

Отв. 10 фунтовъ.

13. Нѣсколько офицеровъ откомандированы съ отрядомъ, состоящимъ изъ пѣхоты и кавалеріи. Каждый офицеръ имѣетъ у себя въ командѣ втрое болѣе кавалеристовъ и въ семь разъ болѣе пѣхотныхъ солдатъ, противъ числа откомандированныхъ офицеровъ. Каждый кавалеристъ имѣетъ при себѣ 2-мя патронами, а каждый пѣхотный солдатъ 22 патронами болѣе противъ числа офицеровъ. У всѣхъ солдатъ вмѣстѣ находится 15360 патроновъ. Спрашивается: сколько было откомандировано офицеровъ?

Отв. 8.

14. Одного человѣка спросили, сколько онъ издержалъ сегодня денегъ? — Онъ отвѣчалъ: сегодня я издержалъ 4-мя рублями болѣе, а вчера вдвое болѣе, чѣмъ третьягодня; если же я суммы издержанныя мною въ эти три дня (считая въ рубляхъ) перемножу между собою, и къ произведенію придамъ 756, то получу сумму въ 134 раза болѣе той, которую я издержалъ сегодня. Спрашивается: сколько онъ издержалъ сегодня?

Отв. 6 или 9 рублей.

15. Нѣсколько купцовъ сложились для общаго торга, и каждый изъ нихъ положилъ въ 10 разъ болѣе рублей противъ числа купцовъ; на этотъ составленный такимъ образомъ капиталъ они выручили проценты, которые 8-ю превышаютъ число купцовъ. Извѣстно, что барышъ составляетъ 288 рублей. Спрашивается: сколько было купцовъ, сложившихся для этого общаго торга?

Отв. 12.

16. Нѣсколько купцовъ сложились для общаго торга и составился капиталъ въ 8240 рублей; послѣ того каждый изъ нихъ прибавилъ въ 40 разъ болѣе рублей противъ числа

сложившихся купцовъ. На всю эту сумму они выручили процентовъ столько, сколько было купцовъ. Когда начали дѣлить барышъ, то каждый взялъ въ 10 разъ болѣе рублей, противъ числа купцовъ и за тѣмъ осталось еще 224 рубля. Спрашивается: сколько было сложившихся купцовъ?

Отв. Или 7, или 8, или 10.

17. Четыре особы A, B, C, D, имѣютъ при себѣ нѣкоторое число рублей, а именно B имѣетъ 1 рублемъ болѣе чѣмъ A, C 1 рублемъ болѣе чѣмъ B, а D 1 рублемъ болѣе чѣмъ C. Если всѣ четыре суммы перемножимъ между собою, то получимъ произведеніе (въ рубляхъ), которое 1168 рублями будетъ превышать кубъ числа рублей D. Спрашивается: сколько рублей имѣетъ при себѣ каждый изъ нихъ?

Отв. A 5, B 6, C 7, D 8 рублей.

18. Нѣкто нанялъ нѣкоторое число работниковъ, а именно: втрое болѣе противъ числа копеекъ, получаемыхъ ежедневно каждымъ работникомъ. Они работали у него 20 днями менѣе противъ числа рублей, получаемыхъ всѣми вмѣстѣ ежедневно, и получили за это время всѣ вмѣстѣ 1344 рубля. Спрашивается: сколько было нанято работниковъ? и сколько они работали дней?

Отв. 120 работниковъ и 28 дней.

19. Найти два числа, которыхъ сумма равнялась бы 63, и которыя имѣли бы то свойство, что если бо̀льшее изъ нихъ раздѣлимъ на меньшее, частное это умножимъ на большее и къ произведенію придадимъ $20\frac{1}{4}$, то получимъ число, котораго кубическій корень единицею менѣе седьмой части бо̀льшаго числа.

Отв. 35 и 28.

20. Нѣкоторый бассейнъ, въ $115\frac{1}{5}$ минутъ наполняется посредствомъ четырехъ отверстій. Если же бы бассейнъ требовалось наполнить посредствомъ каждаго отверстія отдѣльно,

то, для наполненія посредствомъ втораго употребили бы 4-мя, посредствомъ третьяго 8-ю, а посредствомъ четвертаго 12-ю часами болѣе, чѣмъ употребили бы для наполненія бассейна посредствомъ перваго отверстія. Спрашивается: въ какое время бассейнъ наполняется посредствомъ перваго отверстія?

Отв. Въ 4 часа.

21. Найти три числа, которыя бы имѣли слѣдующія свойства: чтобы сумма первыхъ двухъ равнялась a, сумма квадратовъ втораго и третьяго была $= b$, а сумма кубовъ перваго и третьяго $= c$. Какимъ уравненіемъ опредѣляются эти три числа?

Отв. Пусть x означаетъ первое изъ искомыхъ чиселъ; получимъ для опредѣленія его уравненіе: $[b - (a - x)^2]^3 = (c - a^3)^2$. Найдя отсюда x, другія два числа опредѣлятся весьма легко. — Вообще задачу можно почитать рѣшенною, если успѣемъ составить простѣйшее уравненіе, допускаемое этою задачею, хотя бы и не всегда были въ состояніи рѣшить это уравненіе.

22. Найти два числа, которыхъ сумма равнялась бы a, а сумма шестыхъ степеней его была $= b$.

Отв. Произведеніе p искомыхъ чиселъ опредѣляется изъ уравненія: $2p^3 - 9a^2p^2 + 6a^4p - a^6 + b = 0$. (Къ этой задачѣ и къ слѣдующимъ относится замѣчаніе, сдѣланное на 222-й страницѣ этого отд.)

23. Найти два числа, которыхъ сумма равнялась бы a, а сумма седьмыхъ степеней была $= b$.

Отв. Произведеніе p искомыхъ чиселъ опредѣляется изъ уравненія: $7ap^3 - 14a^3p^2 + 7a^5p - a^7 + b = 0$.

Вообще всегда два уравненія: $x + y = a$ и $x^{2n} + y^{2n} = b$ или $x^{2n+1} + y^{2n+1} = b$ могутъ быть приведены

къ одному уравненію n-й степени въ отношеніи къ p; законъ составленія такого уравненія легко можетъ быть выведенъ.

24. Найти двѣ величины такія, чтобъ m разъ взятая разность ихъ, сложенная съ n разъ взятымъ произведеніемъ была $= a$, а произведеніе разности искомыхъ величинъ на сумму квадратовъ ихъ было $= b$.

Отв. Разность y и произведеніе z искомыхъ величинъ опредѣляются изъ уравненій: $ny^3 - 2my^2 + 2ay - nb = 0$, $nz = a - my$. Найдя изъ этихъ уравненій y и z, искомыя величины опредѣлятся весьма легко, рѣшивъ уравненіе 2-й степени. Собственно неизвѣстныя величины опредѣляются уравненіями 6-й степени, но эти уравненія, какъ мы видѣли, легко могутъ быть приведены къ уравненіямъ 3-й и 2-й степени.

25. Сумма трехъ чиселъ равняется a, сумма произведеній ихъ, взятыхъ по-два, $= b$, произведеніе всѣхъ трехъ $= c$. Спрашивается: какимъ уравненіемъ опредѣляются эти три числа?

Отв. Три корня уравненія: $x^3 - ax^2 + bx - c = 0$ суть искомыя числа?

26. Найти три числа, которыя имѣли бы слѣдующія свойства, чтобы сумма ихъ была $= a$, сумма произведеній, взятыхъ по-два, $= b$, а сумма трехъ произведеній, которыя получатся, когда каждое изъ искомыхъ чиселъ умножимъ на сумму квадратовъ остальныхъ двухъ, была $= c$.

Отв. Произведеніе искомыхъ трехъ чиселъ $= \frac{ab-c}{3}$, слѣдовательно корни уравненія $x^3 - ax^2 + bx - \frac{ab-c}{3} = 0$ изображаютъ искомыя три числа.

27. Найти три числа, сумма которыхъ была бы $= a$, сумма квадратовъ ихъ была $= b$, а сумма кубовъ $= c$.

Отв. Сумма произведеній искомыхъ чиселъ, взятыхъ по-два, $= \frac{a^2-b}{2}$, а произведеніе всѣхъ трехъ $= \frac{2c+a^3-3ab}{6}$; слѣдовательно искомыя числа суть корни уравненія:

$$x^3 - ax^2 + \frac{a^2-b}{2}x - \frac{2c+a^3-3ab}{6} = 0.$$

28. Найти два числа, сумма квадратовъ которыхъ была бы $= a$, а сумма кубовъ $= b$.

Отв. Пусть s означаетъ сумму искомыхъ чиселъ, то эта сумма опредѣляется изъ уравненія: $s^3 - 3as + 2b = 0$. Найдя отсюда s, легко можно опредѣлить искомыя числа, рѣшивъ уравненіе: $x^2 - sx + \frac{s^2-a}{2} = 0$.

29. Найти три числа такія, чтобы сумма произведеній искомыхъ чиселъ, взятыхъ по-два, была $= a$, сумма квадратовъ ихъ $= b$, а произведеніе всѣхъ трехъ $= c$.

Отв. Сумма искомыхъ трехъ чиселъ равняется $\pm\sqrt{(2a+b)}$; слѣдовательно оныя будутъ корнями уравненія:

$$x^3 \mp x^2\sqrt{(2a+b)} + ax - c = 0.$$

30. Найти три числа такія, чтобы сумма произведеній искомыхъ чиселъ, взятыхъ по-два, была $= a$, сумма квадратовъ оныхъ была $= b$, а сумма кубовъ $= c$.

Отв. Сумма искомыхъ трехъ чиселъ равняется $\pm\sqrt{(2a+b)}$, произведеніе всѣхъ трехъ $= \frac{1}{3}\left[c \pm (a-b)\sqrt{(2a+b)}\right]$; слѣдовательно три числа будутъ корнями уравненія:

$$x^3 \mp x^2\sqrt{(2a+b)} + ax - \tfrac{1}{3}\left[c \pm (a-b)\sqrt{(2a+b)}\right] = 0.$$

31. Найти три числа такія, чтобы сумма произведеній ихъ, взятыхъ по-два, была $= a$, сумма квадратовъ $= b$, а сум-

ма трехъ произведеній, которыя получатся, когда каждое число умножимъ на сумму квадратовъ двухъ остальныхъ, была $= c$.

Отв. Сумма искомыхъ трехъ чиселъ равняется $\pm \sqrt{(2a + b)}$, а произведеніе ихъ $= \frac{1}{3} \left\{ \pm a \sqrt{(2a + b)} - c \right\}$; слѣдовательно искомыя три числа удовлетворяютъ уравненію:

$$x^3 \mp x^2 \sqrt{(2a+b)} + ax - \tfrac{1}{3} \left\{ \pm a . \sqrt{(2a+b)} - c \right\} = 0.$$

32. Найти три числа такія, чтобы они находились въ непрерывной пропорціи, чтобы сумма ихъ была $= a$, и чтобы сумма кубовъ была $= b$.

Отв. Пусть y означаетъ средній членъ пропорціи, то онъ опредѣляется изъ уравненія: $3y^3 - 3a^2y + a^3 - b = 0$. Изобразивъ чрезъ w одинъ изъ корней этого уравненія окажется, что два крайніе члена пропорціи будутъ корнями уравненія:

$$x^2 - (a - w)\, x - \frac{b - w^3}{3\,(a - w)} + \frac{(a - w^2)}{3} = 0.$$

Полагая $a = 21$, $b = 1971$, получимъ $y^3 - 441y + 2430 = 0$. Три корня этого уравненія есть: $6, -3 + \sqrt{(414)}, -3 - \sqrt{(414)}$. Взявъ $w = 6$, получимъ: $x^2 - 15x + 36 = 0$: корни этого уравненія 3 и 12 будутъ крайніе члены; слѣдовательно непрерывная пропорція есть слѣдующая: 3 : 6 : 12.

33. Найти первые четыре члена такой прогрессіи, въ которой бы разность двухъ крайнихъ членовъ была $= a$, а сумма двухъ среднихъ членовъ $= b$.

Отв. Означая знаменателя прогрессіи чрезъ y, опредѣлимъ его изъ уравненія: $by^3 - ay^2 - ay - b = 0$. Найдя его, опредѣлимъ первый членъ, который будетъ $= \frac{b}{y^2 + y} = \frac{a}{y^3 - 1}$.

34. Найти первые четыре члена такой прогрессіи, въ которой бы сумма двухъ среднихъ членовъ была $= a$, а сумма квадратовъ двухъ крайнихъ членовъ $= b$.

Отв. Полагая разность двухъ среднихъ членовъ $= d$, и $a^2 = y$, опредѣлимъ y изъ уравненія: $y^3 + (15a^2 - 2b)y^2 + (15a^4 + 4a^2b)\,y + a^4\,(a^2 - 2b) = 0$. Найдя y, а слѣдовательно и d, получимъ знаменателя прогрессіи, который $= \frac{a+d}{a-d}$, и первый членъ, равный $\frac{(a-d)^2}{2\,(a+d)}$.

. . . . . .

Если знаемъ напередъ или изъ свойства задачи, приводящей къ извѣстному уравненію, или изъ чего-либо инаго, какое ни есть отношеніе между корнями этого уравненія, то, за исключеніемъ весьма немногихъ случаевъ, всегда возможно полученное уравненіе привести къ другому низшей степени. Слѣдующая за этимъ задача объяснитъ это нѣкоторымъ образомъ.

. . . . . .

35. Пусть $2m$ величинъ даны посредствомъ уравненія: $x^{2m} + ax^{2m-1} + bx^{2m-2} + cx^{2m-3} + \ldots\ldots + kx + l = 0$. Ппредположимъ, что для каждаго корня этого уравненія существуетъ другой такой корень, что сумма этихъ двухъ корней есть постоянная. Какимъ образомъ рѣшить это уравненіе посредствомъ другихъ низшей степени?

Отв. Сумма каждыхъ двухъ корней подобнаго рода $= -\frac{a}{m}$. Расположимъ уравненіе по степенямъ выраженія $x^2 + \frac{ax}{m}$, и поставляя вмѣсто этого выраженія y, получимъ уравненіе m-й степени въ отношеніи къ y. Если изъ

этого послѣдняго уравненія можно опредѣлить y, то получимъ и x изъ уравненія $x^2 + \frac{ax}{m} = y$. Доказательство этого способа основано на разложеніи уравненій на ихъ простыхъ множителей, и легко выводится изъ этого свойства, что представляется самому читателю.

Къ этому роду принадлежитъ напр. уравненіе:

$$x^4 - 10x^3 + 18x^2 + 35x - 12 = 0.$$

Положимъ $x^2 - 5x = y$, и дадимъ уравненію видъ: $(x^2 - 5x)^2 - 7(^2 - 5x) - 12 = 0$. Два уравненія: $y^2 - 7y - 12 = 0$ и $x^2 - 5x = y$ дадутъ искомыя четыре величины для x, а именно:

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{[39 + 2\sqrt{(97)}]}}{2}, \quad x = \frac{5 \pm \sqrt{[39 - \sqrt{(97)}]}}{2}.$$

Предположимъ, что знаемъ напередъ, что въ уравненіи:

$$x^6 - 12x^5 + 42x^4 - 16x^3 - 79x^2 - 68x - 18 = 0$$

три пары корней даютъ одну и ту же сумму; то положимъ $x^2 - 4x = y$ и данное уравненіе представимъ въ видѣ $(x^2 - 4x)^3 - 6(x^2 - 4x)^2 + 17(x^2 - 4x) - 18 = 0$. Рѣшивъ два уравненія: $y^3 - 6y^2 + 17y - 18 = 0$ и $x^2 - 4x = y$ получимъ искомые шесть корней. Изъ перваго найдемъ: $y = 2$, $y = 2 + \sqrt{(-5)}$ и $y = 2 - \sqrt{(-5)}$; слѣдовательно шесть величинъ x будутъ слѣдующія:

$$2 \pm \sqrt{(6, 2 \pm \sqrt{[6 + \sqrt{(-5)}]}}, \quad 2 \pm \sqrt{[6 - (-5)]}.$$

Впрочемъ, помощію неопредѣленныхъ коэфиціентовъ, всегда весьма легко будетъ привести уравненіе къ полагаемому виду.

НЕОПРЕДѢЛЕННЫЯ ЗАДАЧИ

(АНАЛИЗЪ ДІОФАНТА).

Если изъ условій задачи нельзя составить столько уравненій, сколько она предполагаетъ неизвѣстныхъ, то таковая задача принадлежитъ къ роду неопредѣленныхъ. Пусть будетъ дано m уравненій вида: $ax + a'x' + a''x'' + a'''x''' +$ etc. $= k$, содержащихъ M неизвѣстныхъ величинъ: x, x', x'', x''', etc.; и пусть $M > m$, то чрезъ исключеніе $m - 1$ этихъ неизвѣстныхъ величинъ, получимъ уравненіе подобнаго же вида, въ которомъ уже будетъ заключаться только $M - m + 1$ неизвѣстныхъ величинъ. Чтобъ потомъ рѣшить подобное уравненіе, стоитъ только одну изъ этихъ неизвѣстныхъ величинъ выразить посредствомъ всѣхъ остальныхъ, и этимъ послѣднимъ давать произвольныя численныя величины. Такъ напр. если было бы дано уравненіе: $3x + 5x' - 7x'' = 17$, то нашли бы, что $x'' = \frac{3x + 5x' - 17}{7}$. Послѣ этого можно для x и x' брать произвольныя величины, чрезъ что получили бы различныя значенія для x''.

Но обыкновенно присовокупляются еще нѣкоторыя другія условія, которыя неудобно выражаются уравненіями, чрезъ что рѣшеніе значительно затрудняется; такъ, напр. если требуется, чтобы x, x', x'', x''', etc. были необходимо числа цѣлыя, и если, сверхъ этого, оныя всѣ должны быть положительными, и прочее. Въ этомъ случаѣ всегда можно предположить, что коэфиціенты k, a, a', a'', a''', etc. есть числа цѣлыя; ибо, въ противномъ случаѣ, можно уничтожить дроби, умноживъ уравненіе на надлежащее количество.

Уравненіе $ax + a'x' = 1$ можетъ быть рѣшено въ цѣлыхъ числахъ, или по способу, объясненному въ бо̀льшей части

учебныхъ книгъ, или помощію непрерывныхъ дробей (*). Этотъ послѣдній способъ основанъ на VI и VII свойствахъ, изложенныхъ на 105 страницѣ, и гораздо легче перваго способа. Если какимъ-нибудь образомъ успѣемъ опредѣлить одну систему величинъ для x и x' напр. $x = p$, $x = q$, удовлетворяющую уравненію: $ax + a'x' = 1$, то можно вообще положить $x = p + a'n$, $x' = q - an$, и потомъ брать вмѣсто n всякое число цѣлое, положительное или отрицательное.

Слѣдовательно рѣшеніе уравненія $ax + a'x' = k$ заключается въ формулахъ $x = kp + a'n$, $x' = kq - an$; уравненія же $ax + a'x' + a''x'' + a'''x''' + \text{etc.} = k$ въ формулахъ $x = (k - a''x'' - a'''x''' - \text{etc.})\, p + a'n$, $x' = (k - a''x'' - a'''x''' - \text{etc.})\, q - an$, гдѣ вмѣсто n x'', x''', x'''', etc. можно брать какія угодно цѣлыя, положительныя или отрицательныя числа.

Итакъ, вышеупомянутыя m уравненій, содержащія M неизвѣстныхъ, приведены къ уравненію $ax + a'x' = 1$, а это послѣднее всегда возможно, если только a и a' не имѣютъ общаго дѣлителя. Уравненіе $ax + a'x' + a''x'' + \text{etc.} = k$ будетъ возможно, если, по раздѣленіи всего уравненія на наибольшаго общаго дѣлителя количествъ k, a, a', a'', etc.,

---

(*) Кромѣ упомянутаго способа, основаннаго на теоріи непрерывныхъ дробей, имѣются еще и другіе. Одинъ изъ нихъ, придуманный итальянскимъ математикомъ В. Либри и изложенный въ его сочиненіи, подъ заглавіемъ: *Mémoires de Mathématique et de Physique*, *Tome I*, *Florence*, 1829, основанъ на тригонометрическихъ формулахъ. Другой помѣщенъ въ *Mémoires de l'Académie Imperiale des Sciences de St. Pétersbourg*, *Tome I. 2-e livraison*, 1830, подъ заглавіемъ: *Recherches numériques*, соч. экстраординарнаго академика Буняковскаго и основанъ на доказанной въ упомянутомъ разсужденіи теоремѣ.

Примѣчаніе переводчика.

останутся по крайней мѣрѣ два коэфиціента, изъ числа a, a', a'', a''', etc., которые не будутъ имѣть никакого общаго дѣлителя между собою.

. . . . . .

1. Какія числа, будучи раздѣлены на 3, даютъ въ остаткѣ 1, а будучи раздѣлены на 5, даютъ въ остаткѣ 2?

Отв. 7, 22, 37, 52, 67, 82, и т. д.; вообще всѣ числа вида: $15n + 7$.

2. Какія числа, будучи раздѣлены на 8, даютъ въ остаткѣ 5, а будучи раздѣлены на 11, даютъ въ остаткѣ 4?

Отв. 37, 125, 213, 301, 389, и т. д.; вообще всѣ числа вида: $88n + 37$.

3. Какія числа дѣлятся на 9 на-цѣло, а будучи раздѣлены на 14, даютъ въ остаткѣ 8?

Отв. 36, 162, 288, 414, 540 и т. д.; вообще всѣ числа вида: $216n + 36$.

4. Крестьянка принесла на рынокъ яица, числомъ болѣе 100, но менѣе 200. Если она будетъ продавать яица по 15 штукъ, то у нея останется 4, а если будетъ продавать по дюжинамъ, то у нея останется 10 штукъ. Спрашивается: сколько она принесла яицъ?

Отв. 154.

5. Мальчикъ, играя орѣхами, число которыхъ заключалось между 1 и 400, хотѣлъ разложить ихъ на нѣсколько кучекъ. Если онъ въ каждую кучку положитъ по 13, то у него останется 9 орѣховъ; если же онъ въ каждую кучку положитъ по 17 орѣховъ, то у него останется 14. Спрашивается: сколько у него было орѣховъ?

Отв. 269.

Послѣднія двѣ задачи принадлежатъ ли совершенно къ неопредѣленнымъ?

6. Какія числа, будучи раздѣлены на 3, на 7 и на 10, даютъ по порядку остатки 2, 3 и 9?

Отв. 59, 269, 479, 689, 899 и т. д.; вообще всѣ числа вида: $210n + 59$.

7. Какія числа, будучи раздѣлены на 6, на 12 и на 15, даютъ по порядку остатки 1, 1 и 10?

Отв. 25, 85, 145, 205, 265 и т. д., вообще всѣ числа вида: $60n + 25$.

8. Какія числа, будучи раздѣлены на 5, на 6, на 7 и на 8, даютъ по порядку остатки 3, 1, 0 и 5?

Отв. 133, 973, 1813, 2653, 3493 и т. д.; вообще всѣ числа вида: $840n + 133$.

9. Какія числа, будучи раздѣлены на 4, на 6, на 9 и на 15, даютъ для первыхъ трехъ остатокъ 3, а для четвертаго остатокъ 12?

Отв. 147, 327, 507, 687, 867 и т. д.; вообще всѣ числа вида: $180n + 147$.

10. Одного генерала спросили, сколько у него солдатъ въ полку? Онъ отвѣчалъ: въ моемъ полку менѣе 2000 солдатъ; если я ихъ построю по 5 или по 6 или по 7 человѣкъ, то не останется ни одного солдата; если же я ихъ построю по 11, то у меня будетъ 9 человѣкъ лишнихъ, а по 13, то у меня будетъ недоставать 8 солдатъ. Спрашивается сколько у него въ полку было солдатъ?

Отв. 1890 человѣкъ.

11. Одинъ капитанъ хотѣлъ построить свою роту, въ которой было болѣе 100 и менѣе 200 человѣкъ. Если онъ поставитъ солдатъ по 2 или по 4 или по 8 или по 10, то у него каждый разъ останется по одному человѣку; если же

онъ поставитъ солдатъ по 6 или по 12, то каждый разъ останется по 5 человѣкъ. Спрашивается: сколько солдатъ было у него въ ротѣ?

Отв. 161 человѣкъ.

12. Одинъ игрокъ считалъ два раза выигранные имъ червонцы: въ первый разъ по 3 червонца и у него осталось 2, а второй по 5 червонцевъ и у него остался 1. Послѣ сего онъ сѣлъ играть снова и проигралъ 6 червонцевъ; считая оставшіеся у него червонцы сперва по 7, а потомъ по 11, у него каждый разъ оставалось 3 червонца. Спрашивается: сколько у него послѣ перваго выигрыша было червонцевъ?

Отв. 86 или 1241 или 2396, и т. д.

13. Найти два числа, которыя бы имѣли то свойство, что если первое изъ нихъ умножимъ на 17, а второе на 26, то первое произведеніе было бы 7-ю болѣе втораго произведенія.

Отв. 5 и 3; или 31 и 20; или 57 и 37; и т. д.

14. На одномъ литейномъ заводѣ выливаютъ орудія двухъ родовъ. Каждое орудіе перваго рода вѣситъ 16, а каждое орудіе втораго рода 25 пудовъ; но на всѣ орудія втораго рода вышло 1 пудомъ металла менѣе, чѣмъ на всѣ орудія перваго рода. Спрашивается: сколько было вылито орудій каждаго рода.

Отв. Перваго рода 11, а втораго 7; или перваго рода 36, а втораго 23; и т. д.

15. Нѣкто мѣнялъ полуимперіалы (считая ихъ по 19 рублей) на пятирублевыя ассигнаціи, и сверхъ нѣкотораго числа этихъ ассигнацій получилъ еще 4 рубля. Спрашивается:

сколько полуимперіаловъ и на сколько ассигнацій онъ вымѣнялъ?

Отв. 16 полуимперіаловъ на 60 ассигнацій; или 21 на 79; и т. д.

16. Найти три числа, которыя имѣли бы то свойство, что если первое изъ нихъ умножимъ на 7, второе на 9, а третье на 11, то первое произведеніе было бы 1 менѣе втораго произведенія и 2-е болѣе третьяго произведенія?

Отв. 5, 4, 3; или 104, 81, 66; или 203, 158, 129 и т. д.

17. Нѣсколько мужчинъ, женщинъ и дѣтей издержали нѣкоторую сумму денегъ. Каждый мужчина издержалъ 19, каждая женщина 10, а каждое дитя 8 рублей. Всѣ мужчины вмѣстѣ издержали 7 рублями болѣе женщинъ и 15 рублями болѣе дѣтей. Спрашивается: сколько въ этомъ обществѣ было мужчинъ, женщинъ и дѣтей?

Отв. 13 мужчинъ, 24 женщины и 29 дѣтей; или 53 мужчинъ, 100 женщинъ и 124 дѣтей и т. д.

18. Разложить 142 на такія двѣ части, чтобы одна изъ нихъ дѣлилась на 9, а другая на 14.

Отв. 72 и 70.

19. Разложить 1591 на такія двѣ части, чтобы одна изъ нихъ дѣлилась на 23, а другая на 34?

Отв. 1081 и 510; или 299 и 1292.

20. Разложить 4890 на такія двѣ части, чтобы первая изъ нихъ, будучи раздѣлена на 37, давала въ остаткѣ 3, а вторая, будучи раздѣлена на 54, давала въ остаткѣ 6?

Отв. 780 и 4110; или 2778 и 2112; или 4776 и 114.

21. Нѣкоторое общество, состоящее изъ мужчинъ и женщинъ, издержало 876 рублей. Каждый мужчина издержалъ 19,

а каждая женщина 13 рублей. Спрашивается: сколько въ этомъ обществѣ было мужчинъ и женщинъ?

Отв. 3 и 63; или 16 и 44; или 29 и 25; или 42 и 6.

22. Нѣкто купилъ лошадей и воловъ, вмѣстѣ на 1770 рублей. Каждая лошадь стоитъ 31, а каждый волъ 21 рубль. Спрашивается: сколько онъ купилъ лошадей и воловъ?

Отв. 9 и 71; или 30 и 40; или 51 и 9.

23. Нѣкто купилъ свиней, козъ и овецъ, числомъ всѣхъ вмѣстѣ 124 головы, за 400 рублей. Каждая свинья стоитъ $4\frac{1}{2}$ рубля, каждая коза $3\frac{1}{6}$ рубля, а каждая овца $1\frac{1}{4}$ рубль. Спрашивается: сколько онъ купилъ каждаго рода этихъ животныхъ?

Отв. 17, 99, 8; или 40, 60, 24; или 63, 21, 40.

24. Разложить 30 на три части, которыя бы имѣли то свойство, что если первую часть умножимъ на 7, вторую на 19, а третью на 38, то сумма этихъ трехъ произведеній должна быть = 745?

Отв. 6, 11, 13.

25. Разложить 100 на три части такія, что если первую часть умножимъ на 17, вторую на 11, а третью на 3, то сумма этихъ трехъ произведеній должна быть = 880?

Отв. 2, 69, 29; или 6, 62, 32; или 10, 55, 35; и т. д. вообще 10 различныхъ случаевъ.

26. Найти три цѣлыя числа, которыя имѣли бы то свойство, что если первое умножимъ на 5, второе на 13, а третье на 18, то сумма всѣхъ трехъ произведеній должна быть = 997; если же первое умножимъ на 11, второе на 20, а третье на 37, то сумма произведеній должна равняться 1866?

Отв. 16, 29, 30.

27. Одна крестьянка продала гусей, куръ, утокъ и голубей, всего 76 штукъ, за 44 рубля 80 копеекъ. Каждый гусь стоитъ 1 рубль, курица 50 копеекъ, утка 80 копеекъ, а голубь 15 копеекъ. Спрашивается: сколько она продала штукъ каждаго рода?

Отв. 2 гуся, 46 куръ, 24 утки и 4 голубя; или 1 гуся, 15 куръ, 42 утки и 18 голубей; и т. д.

28. Тридцать особъ, мужчинъ, женщинъ и дѣтей, издержали вмѣстѣ 58 рублей, каждый мужчина издержалъ $3\frac{1}{2}$ рубля, каждая женщина $1\frac{3}{8}$ рубля, а каждое дитя $\frac{1}{4}$ рубля. Спрашивается: сколько было мужчинъ, женщинъ и дѣтей?

Отв. 10 мужчинъ, 16 женщинъ и 4 дѣтей.

29. Найти два числа, которыхъ сумма и произведеніе были бы равны между собою?

Отв. Пусть x и y означаютъ искомыя числа, то, бравъ x произвольно, $y = \frac{x}{x-1}$.

30. Найти два числа такія, чтобы сумма ихъ относилась къ произведенію этихъ же искомыхъ чиселъ какъ m къ n?

Отв. Означая чрезъ x и y искомыя два числа, и бравъ x произвольнымъ, будетъ $y = \frac{nx}{mx-n}$.

31. Найти два цѣлыя числа такія, чтобы сумма и произведеніе ихъ, взятыя вмѣстѣ, равнялись 139?

Отв. 1 и 69; 3 и 34; 4 и 27; 6 и 19; 9 и 13.

32. Найти два цѣлыя числа такія, чтобы произведеніе ихъ превышало удвоенную разность этихъ же искомыхъ чиселъ числомъ 100?

Отв. 10 и 10; 14 и 8; 22 и 6; 30 и 5; 46 и 4; 94 и 3.

33. Разложить дробь $\frac{230}{77}$ на двѣ другія, у которыхъ бы знаменатели были 7 и 11?

Отв. $\frac{5}{7}$ и $\frac{25}{11}$; или $\frac{12}{7}$ и $\frac{14}{11}$; или $\frac{19}{7}$ и $\frac{3}{11}$.

34. Найти два числа такія, чтобы сумма квадратовъ ихъ была также квадратное число?

Отв. Если чрезъ p и q означимъ два произвольныя числа, то одно изъ искомыхъ чиселъ будетъ $= p^2 - q^2$, а другое $= 2\,pq$; напр. 3 и 4; 6 и 8; 5 и 12; и т. д.

35. Пусть a и c будутъ два данныя раціональныя числа; спрашивается: какія раціональныя числа можно брать вмѣсто x и y, чтобы выраженіе $a^2x^2 + cy^2$ было полнымъ квадратомъ?

Отв. $x = cn^2 - m^2$, $y = 2amn$; ибо $a^2\,(cn^2 - m^2)^2 + c\,(2amn)^2 = a^2\,(cn^2 + m^2)^2$. Вмѣсто m и n можно брать произвольныя раціональныя числа.

36. Какія величины для x обращаютъ выраженіе $a^2x^2 + c$ въ полный квадратъ?

Отв. $x^2 = \frac{cn^2 - m^2}{2amn}$, ибо $a^2\left(\frac{cn^2 - m^2}{2amn}\right)^2 + c = \left(\frac{cn^2 + m^2}{2mn}\right)^2$.

37. Пусть a, b, c, означаютъ три раціональныя числа; спрашивается: какія раціональныя величины для x и y обратятъ выраженіе $a^2x^2 + bxy + cy^2$ въ полный квадратъ?

Отв. $x = m^2 - cn^2$, $y = bn^2 - 2amn$, ибо $a^2\,(m^2 - cn^2)^2 + b\,(m^2 - cn^2)\,(bn^2 - 2amn) + c\,(bn^2 - 2amn)^3 = (am^2 - bmn + acn^2)^2$.

38. Опредѣлить величины для x, обращающія выраженіе $a^2x^2 + bx + c$ въ полный квадратъ?

Отв. $x = \frac{m^2 - cn^2}{bn^2 - 2amn}$; ибо $a^2\left(\frac{m^2 - cn^2}{bn^2 - 2amn}\right)^2 + \left(\frac{m^2 - cn^2}{bn^2 - 2amn}\right) + c = \left(\frac{am^3 - bmn + acn^2}{bn^2 - 2amn}\right)^2$.

39. Обратить выраженіе $ax^2 + bx + c^2$ въ полный квадратъ.

Отв. $x = \frac{bn^2 - 2cmn}{m^2 - an^2}$; ибо $a\left(\frac{bn^2 - 2cmn}{m^2 - an^2}\right)^2 + b\left(\frac{bn^2 - 2cmn}{m^2 - an^2}\right) + c^2 = \left(\frac{cm^2 - bmn + acn^2}{m^2 - an^2}\right)^2$.

40. Зная, что величина $x = w$ обращаетъ выраженіе $ax^2 + bx + c$ въ полный квадратъ, найти другія рѣшенія?

Отв. Подставляя $w + py$ вмѣсто x въ данное выраженіе, оно приметъ видъ: $fy^2 + gy + h$. Это выраженіе будетъ полнымъ квадратомъ, если вмѣсто y подставимъ величину $\frac{gn^2 - 2hmn}{m^2 - fn^2}$; слѣдовательно данное выраженіе будетъ полнымъ квадратомъ при $x = w + p\left(\frac{gn^2 - 2hmn}{m^3 - fn^2}\right)$.

41. Предполагая, что выраженіе $ax^2 + bxy + ey^2$ можетъ быть разложено на два раціональные множителя $mx + ny$, $m'x + n'y$, и слѣдовательно что выраженіе $b^2 + 4ac$ есть полный квадратъ. Спрашивается: какія величины должно брать вмѣсто x и y, чтобы данное выраженіе $ax^2 + bxy + cy^2$ было полнымъ квадратомъ?

Отв. $x = np^2 - n'q^2$, $y = m'q^2 - mp^2$; ибо при этомъ положеніи $mx + ny = (m'n - mn')\,q^2$ и $m'x + n'y = (m'n - mn')p^2$; слѣдовательно: $ax^2 + bxy + cy^2 = (mx + ny)(m'x + ny) = (m'n - mn')^2 p^2 q^2$.

42. Какимъ образомъ рѣшается въ цѣлыхъ числахъ уравненіе $x^2 - Ay^2 = 1$, разумѣя подъ A какое ни есть цѣлое положительное число, за исключеніемъ, впрочемъ, того случая, когда оно будетъ число квадратное?

Отв. Рѣшеніе этой важной задачи основано на 3-мъ и 4-мъ свойствахъ непрерывныхъ дробей, изложенныхъ на 110 страницѣ I отд. Величины для x и y суть не что иное, какъ числитель и знаменатель приближающейся дроби, о которой

тамъ упоминается. Напр. для $A = 106$, $x = 4005$, $y = 389$; для $A = 124$, $x = 4620799$, $y = 414960$; для $A = 133$, $x = 2588599$, $y = 224460$. Приводимыя здѣсь рѣшенія суть наименьшія. Открытіемъ этого способа, неподлежащаго никакому исключенію, мы одолжены Лагранжу, сверхъ того, онъ гораздо проще способа Нелля, изложеннаго Эйлеромъ въ его Алгебрѣ.

43. Если положимъ, что наименьшее изъ рѣшеній уравненія $x^2 - Ay^2 = 1$, будетъ $x = m$, $y = n$; то какъ найти всѣ другія рѣшенія этого же самаго уравненія?

Отв. $$x = \frac{[m + n\sqrt{(A)}]^p + [m - n\sqrt{(A)}]^p}{2},$$

$$y = \frac{[m + n\sqrt{(A)}]^p - [m - n\sqrt{(A)}]^p}{2\sqrt{(A)}};$$

гдѣ p изображаетъ всякое положительное число; замѣтимъ, впрочемъ, что эти формулы ирраціональны только по виду.

Для $p = 0$, $x = 1$, $y = 0$.

Для $p = 1$, $x = m$, $y = n$, рѣшеніе, уже извѣстное по предположенію.

Для $p = 2$, $x = m^2 + An^2$, $y = 2mn$.

Для $p = 3$, $x = m^3 + 3Amn^2$, $y = 3m^2n + An^3$.

Для $p = 4$, $x = m^4 + 6Am^2n^2 + A^2n^4$, $y = 4m^3n + 4Amn^3$

и т. д.

Отсюда видно, что новыя рѣшенія получаются, начиная отъ $p = 2$.

Предположимъ, что выраженіе $fx^2 + gxy + hy^2$ можетъ быть обращено въ полный квадратъ; спрашивается: какимъ образомъ привести рѣшеніе этой задачи къ рѣшенію уравненія: $x^2 - Ay^2 = 1$ въ цѣлыхъ числахъ?

44. Найти три числа, которыя имѣли бы то свойство, чтобы сумма всѣхъ трехъ, равно и сумма каждыхъ двухъ чиселъ была полнымъ квадратомъ?

Отв. 41, 80, 320; или 22, 42, $68\frac{1}{4}$; и безчисленное множество другихъ чиселъ.

45. Найти два числа такія, чтобы разность ихъ равнялась разности кубовъ этихъ же искомыхъ чиселъ?

Отв. $\frac{5}{7}$ и $\frac{3}{7}$; $\frac{8}{13}$ и $\frac{7}{13}$; $\frac{16}{19}$ и $\frac{5}{19}$; и безчисленное множество другихъ.

46. Какіе остатки могутъ произойти отъ раздѣленія полнаго квадрата на числа 2, 3, 4, 5, 6, и т. д.?

Отв. Отъ раздѣленія на 2, на 3 и на 4 остатки 0, 1; на 5 остатки 0, 1, 4; на 6 остатки 0, 1, 3, 4; на 7 остатки 0, 1, 2, 4; на 8 остатки 0, 1, 4; на 9 остатки 0, 1, 4, 7; на 10 остатки 0, 1, 4, 5, 6, 9, и т. д.

Можетъ ли выраженіе $3x^n + 2$ сдѣлаться полнымъ квадратомъ, если вмѣсто x будемъ брать числа цѣлыя? Можетъ ли выраженіе $14x^n + 3$ сдѣлаться полнымъ квадратомъ?

47. Какіе могутъ произойти остатки отъ раздѣленія кубическаго числа на числа 7, 8, 9?

Отв. Отъ раздѣленія на 7 остатки 0, 1, 6; на 8 остатки 0, 1, 3, 5, 7; на 9 остатки 0, 1, 8.

Могутъ ли выраженія $8x^n + 16$, $18x^n + 7$, когда-либо сдѣлаться полными кубами, если вмѣсто x будемъ брать числа цѣлыя?

48. Найти такія два числа, чтобы сумму квадратовъ ихъ можно было разбить на два множителя, изъ которыхъ каждый равнялся бы также суммѣ двухъ квадратовъ?

Отв. Аналитическое уравненіе:

$(mm' + nn')^2 + (mn' + nm')^2 = m^2 + n^2)\ (m'^2 + n'^2)$

удовлетворяетъ этому вопросу; очевидно, что въ этой фор-

мулѣ вмѣсто m, n, m', n' можно брать всѣ возможныя цѣлыя и дробныя числа.

49. Найти четыре квадрата такіе чтобы сумму ихъ можно было разбить на двухъ множителей, изъ которыхъ одинъ равнялся бы суммѣ трехъ квадратовъ, а другой суммѣ двухъ квадратовъ?

Отв. Аналитическое уравненіе:

$$(mm' + nn')^2 + (mn' - nm')^2 + (pm')^2 + (pn')^2 = (m^2 + n^2 + p^2)(m'^2 + n'^2)$$

удовлетворяетъ этому вопросу.

50. Найти четыре квадрата такіе, чтобы сумму ихъ можно было разбить на два множителя, изъ которыхъ каждый бы равнялся суммѣ трехъ квадратовъ.

Отв. Аналитическое уравненіе:

$$(mm' + nn' + pp')^2 + (mn' - nm')^2 + (mp' - pm')^2 + (np' - pn')^2 = (m^2 + n^2 + p^2)(m'^2 + n^2 + p'^2)$$

удовлетворяетъ этому вопросу.

51. Найти четыре квадрата такіе, чтобы сумму ихъ, можно было разбить на два множителя, изъ которыхъ каждый равнялся бы суммѣ четырехъ квадратовъ.

Отв. Аналитическое уравненіе:

$$(mm' + nn' + pp' + qq')^2 + (mn' - nm' + pq' - qp')^2 + (mp' - pm' + qn' - nq')^2 + (np' - pn' + mq' - qm')^2 = (m^2 + n^2 + p^2 + (m'^2 + n'^2 + p'^2 + q')^2$$

удовлетворяетъ этому вопросу.

52. Какія значенія можно давать неопредѣленнымъ величинамъ x и y, чтобы выраженіе $x^2 + Ay^2$ возможно было разбить на два множителя такого же вида.

Отв. $x = mm' + Ann'$, $y = mn' - nm'$; ибо $(mm' + Ann')^2 + A(mn' - nm')^2 = (m^2 + An^2)\, m'^2 + An'^2)$.

53. Положимъ, что a, a', a'', etc. суть остатки, происшедшіе отъ раздѣленія чиселъ A, A', A'', etc. на число k, то эти послѣднія числа можно представить въ видѣ $nk + a$, $n'k + a'$, $n''k + a''$, etc. и слѣдовательно остатокъ произведенія $AA'A''$ etc. будетъ тотъ же самый, что̀ и остатокъ произведенія $a\,a'\,a''$ etc. Спрашивается какимъ образомъ основываясь на этомъ, сократить дѣйствія, когда ищемъ остатокъ дѣленія числа, возвышеннаго въ большую степень на какое-нибудь число k.

Отв. Данную степень должно разбить на низшія и опредѣлить остатки этихъ послѣднихъ; потомъ, раздѣливъ произведеніе этихъ остатковъ на k, получимъ искомый остатокъ. (Это послѣднее дѣйствіе значительнымъ образомъ сокращается, откидывая кратныя отъ k, какъ сейчасъ было упомянуто.) Такимъ образомъ можно начать со второй степени и постепенно переходить къ четвертой, восьмой, и т. д.; напр. остатокъ, происходящій отъ раздѣленія 543^{113} на 257, или что все равно, остатокъ отъ раздѣленія $29^{113} = 57$.

. . . . . .

«Пусть p означаетъ какое-нибудь простое число (nombre «premier, Primzahl), а A другое число, которое не «дѣлится на p: то всегда остатокъ дѣленія A^{p-1} на p «будетъ $= 1$» (*).

Какъ доказать эту теорему, весьма важную въ теоріи чиселъ?

. . . . . .

54. Если p означаетъ простое, а m какое-нибудь очень большое число, то какимъ образомъ, помощью этой теоремы,

---

(*) Эта теорема извѣстна подъ названіемъ Ферматовой.

Примѣчаніе переводчика.

опредилить остатокъ степени A^m еще проще, чѣмъ въ предидущей 53-й задачѣ?

Отв. Положимъ, что m, будучи раздѣлено на $p - 1$, даетъ остатокъ r, то остатокъ отъ раздѣленія Am будетъ тотъ же самый, что и отъ раздѣленія A^r, гдѣ $r < p - 1$.

55. Число, равное $9^{9^{9}} = 9^{387420489}$, будетъ состоять не мѣнѣе, какъ изъ 369693100 цифръ, что̀ весьма легко найти посредствомъ логариѳмовъ. Спрашивается: какіе получатся остатки отъ раздѣленія этого чрезвычайно большаго числа на простыя числа 11, 13, 17 и 19?

Отв. Для 11 остатокъ 5, для 13 остатокъ 3, для 17 остатокъ 9, а для 19 остатокъ 16.

56. Какой остатокъ произойдетъ отъ раздѣленія степени $A^{\frac{p-1}{2}}$ на p, когда p есть простое число, а A не дѣлится на p?

Отв. Или $+1$, или -1, слѣдовательно или 1 или $p - 1$.

57. Если p изображаетъ простое число, а a, b, c, d,.....t, u суть цѣлыя положительныя или отрицательныя числа, то сколько будетъ такихъ цѣлыхъ величинъ для x, между предѣлами 0 и p, при которыхъ выраженіе $ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} + dx^{m-3} + \ldots + tx + u$ будетъ дѣлиться на p.

Отв. Не болѣе m; если только всѣ коэфиціенты a, b, c,....u не дѣлятся на p; ибо, въ противномъ случаѣ, всякая величина для x удовлетворяетъ вопросу. — Почему?

Полагая, что всѣ величины для x, заключающіяся между 0 и p, извѣстны, какъ опредѣлить виды всѣхъ остальныхъ рѣшеній? — Число видовъ будетъ опредѣленное, а именно будетъ равняться числу рѣшеній отъ 0 до p; а число рѣшеній будетъ безконечное.

58. Выраженіе $ax^2 + bxy + cy^2$, въ которомъ a, b, c суть данныя числа, а x и y цѣлыя раціональныя, не можетъ изображать всякое цѣлое число, но только нѣкоторый родъ цѣлыхъ чиселъ, относящихся къ этому виду. Спрашивается: какимъ образомъ таковую формулу обратить въ другую $a' x'^2 + b'x'y' + c'y'^2$, которая имѣла бы то свойство, чтобы изображала всѣ числа, которыя могутъ быть изображены первою формулою, и наоборотъ, чтобы всѣ числа, заключающіяся въ первой формулѣ, заключались и въ этой послѣдней?

Отв. Возьмемъ два цѣлыя числа m и n, произвольныя, но только не имѣющія общаго дѣлителя; послѣ этого опредѣлимъ другіе два числа m' и n', которыя бы удовлетворяли неопредѣленному уравненію: $mn' - nm' = \pm 1$, котораго число рѣшеній безконечно; потомъ положимъ $x = mx' + ny'$ а $y = m'x' + n'y'$ и подставимъ эти величины въ выраженіи $ax^2 + bxy + cy^2$, то оно обратится въ $a'x'^2 + b'x'y' + c'y'^2$, которое будетъ имѣть требуемое свойство.

Примѣчательно то, что всегда будетъ $b^2 - 4ac = b'^2 - 4a'c'$. — Почему? — Величину $b^2 - 4ac$ называютъ *опредѣляющею* (détermiante, bestimmende), ибо отъ нея большею частію зависятъ свойства выраженія $ax^2 + bxy + cy^2$. Эта величина имѣетъ еще то свойство, что по ея знаку можно судить, разлагается ли формула $ax^2 + bxy + cy^2$ на два возможные множителя $kx + ly$ и $k'x + l'y$, или нѣтъ.

. . . . . .

Неопредѣленныя задачи принадлежатъ къ той примѣчательной и занимательной части чистой ариѳметики, въ которой числа разсматриваются не просто какъ величины, но въ отношеніи особенныхъ свойствъ, которыми они отличаются между собою. Желающіе почерпнуть подробныя свѣдѣнія по этой части могутъ читать послѣднія главы Алгебры Эйлера, Théorie des nombres Лежандра и Disquisitiones arithmeticae Гаусса.

При чтеніи двухъ вышеупомянутыхъ сочиненій Гаусса и Лежандра, я совѣтую обратить особенное вниманіе на теорему, относящуюся къ *закону взаимности* (Théorème concernant une loi de réciprocité, qui existe entre deux nombres premiers quelconques, pag. 198), на которую Гауссъ, сверхъ доказательства, находящагося въ его сочиненіи, предложилъ еще другое простѣйшее, принятое Лежандромъ во второмъ изданіи его теоріи чиселъ. Это предложеніе состоитъ въ слѣдующемъ:

Если p и q суть два числа простыя, то остатокъ, происходящій отъ раздѣленія $q^{\frac{p-1}{2}}$ на p будетъ тотъ же, что̀ и остатокъ дѣленія $p^{\frac{q-2}{2}}$ на q, т. е. или оба $+1$ или оба -1, если только простыя числа p и q не будутъ оба вида: $4n+3$. Если же они вида: $4n+3$, то остатки бтдутъ съ противными знаками, т. е. когда одинъ будетъ $+1$, то другой будетъ -1, и наоборотъ.

Задача 58-я служитъ основаніемъ весьма обширной теоріи трехчленныхъ множителей (der trinomischen Faktoren), о которыхъ въ вышеупомянутыхъ двухъ сочиненіяхъ говорится весьма много и помѣщено, между прочимъ, много новаго.

ЗАДАЧИ, ОТНОСЯЩІЯСЯ КЪ ПРОГРЕССІЯМЪ И ФИГУРНЫМЪ ЧИСЛАМЪ.

1. Нѣкто нанялъ слугу на слѣдующихъ условіяхъ: за первый годъ онъ получитъ жалованья 300 рублей, за каждый же слѣдующій годъ онъ будетъ получать 24 рублями 50 копейками болѣе, чѣмъ за предъидущій. Спрашивается: сколько

слуга получитъ за 17-й годъ, и сколько за всѣ 17 лѣтъ своей службы?

Отв. 692 рубля и 8432 рубля.

2. Нѣкто издержалъ сегодна 2 рубля и намѣренъ увеличивать свой расходъ ежедневно 40 копейками. Спрашивается: сколько онъ издержитъ въ 16-й день, считая сегодняшній за первый день, и сколько въ продолженіи всѣхъ 16 дней?

Отв. 8 рублей и 80 рублей.

3. За вырытіе колодца въ 30 футовъ глубины условились платить слѣдующимъ образомъ: за вырытіе перваго фута 1 рубль 20 копеекъ, а за каждый слѣдующій футъ 20 копейками болѣе, чѣмъ въ предъидущій. Спрашивается: сколько должно будетъ заплатить за вырытіе послѣдняго фута и сколько за вырытіе всего колодца?

Отв. 7 рублей и 123 рубля.

4. 3500 рублей отданы въ ростъ по 4 процента и ежегодно къ этому капиталу прибавляютъ 300 рублей. Спрашивается: какъ велики будутъ проценты за 24 года съ первоначальнаго капитала и ежегодно прибавляемыхъ 300 рублей.

Отв. 6672 рубля.

5. Одинъ путешественникъ, желающій въ 19 дней поспѣть въ нѣкоторый городъ, долженъ каждый день проходить $\frac{1}{4}$ верстою болѣе, чѣмъ въ предъидущій. Извѣстно, что онъ въ послѣдній день прошелъ $14\frac{1}{2}$ верстъ; спрашивается: сколько верстъ онъ прошелъ въ первый день и сколько верстъ до мѣста его путешествія?

Отв. 10 верстъ и $232\frac{3}{4}$ версты.

6. Найти разность ариѳметической прогрессіи, состоящей изъ 22 членовъ, которой первый членъ $= 1$, а послѣдній $= 15$.

Отв. $\frac{2}{3}$.

7. Опредѣлить изъ сколькихъ членовъ состоитъ ариѳметическая прогрессія, которой разность = 3, первый членъ = 5, а послѣдній = 302.

Отв. Изъ 100 членовъ.

8. Одного человѣка спросили, сколько онъ получаетъ жалованья. Онъ отвѣчалъ: теперь я имѣю 550 рублей; при опредѣленіи же моемъ получалъ только 100 рублей, но за радѣніе къ службѣ получалъ ежегодно прибавки 30 рублей. Спрашивается: сколько лѣтъ онъ служитъ?

Отв. 16 лѣтъ.

9. Нѣкто, не въ состояніи будучи вдругъ уплатить своимъ кредиторамъ 12950 рублей, согласился съ ними уплачивать по мѣсячнымъ терминамъ, а именно: въ первый мѣсяцъ 600 рублей, въ каждый же слѣдующій 50 рублями болѣе, чѣмъ въ предъидущій. Спрашивается: во сколько мѣсяцевъ онъ уплатитъ весь долгъ, и сколько онъ долженъ будетъ заплатить въ послѣдній мѣсяцъ?

Отв. Въ 14 мѣсяцевъ и 1250 рублей.

10. Изъ Физики извѣстно, что всякое тѣло, падающее въ безвоздушномъ пространствѣ, пробѣгаетъ въ первую секунду $15\frac{5}{8}$ футовъ, въ каждую же слѣдующую секунду $31\frac{1}{4}$ футомъ болѣе, чѣмъ въ предъидущую; спрашивается: если тѣло будетъ падать 20 секундъ, то сколько футовъ оно перейдетъ въ послѣднюю секунду, и сколько въ продолженіи всего времени его паденія?

Отв. $609\frac{3}{8}$ футовъ и 6250 футовъ.

11. Спрашивается: во сколько времени тѣло, падая при тѣхъ же обстоятельствахъ, перейдетъ пространство въ 4000 футовъ?

Отв. Въ 16 секундъ.

12. Нѣкто говорилъ, что онъ въ нынѣшнемъ году сберегъ 78 рублей, и что онъ уже теперь имѣетъ капиталъ въ 1350 рублей, который накопилъ, сберегая, отъ самаго вступленія въ службу, каждый годъ 2 рублями болѣе, чѣмъ въ предъидущій. Спрашивается: сколько лѣтъ онъ въ службѣ, и сколько сберегъ онъ въ первый годъ?

Отв. 25 лѣтъ и 30 рублей.

13. Нѣкто былъ осужденъ къ уплатѣ 800 рублей штрафу въ нѣсколько терминовъ слѣдующимъ образомъ: въ первый терминъ 20 рублей, въ каждый же послѣдующій нѣкоторымъ постояннымъ числомъ рублей болѣе, такъ-что въ послѣдній терминъ ему придется уплатить 80 рублей. Спрашивается во сколько терминовъ онъ уплатитъ весь штрафъ, и какъ велико постоянное число рублей, которое онъ долженъ прибавлять при уплатѣ въ каждый терминъ?

Отв. 16 терминовъ и 4 рубля.

14. Въ нѣкоторомъ цейхгаузѣ лежало, одинъ на другомъ, 15 рядовъ ядеръ; когда у бомбардира спросили, сколько ядеръ находится къ нижнемъ ряду, то онъ отвѣчалъ: во всей кучѣ находится 4200 ядеръ; въ каждомъ же ряду находится 20 ядрами менѣе, чѣмъ въ томъ ряду, который лежитъ непосредственно подъ нимъ. Спрашивается: сколько ядеръ было въ нижнемъ ряду?

Отв. 420.

15. Одинъ метеорологъ, въ числѣ своихъ наблюденій замѣтилъ, что отъ 8-го до 19-го іюня извѣстнаго годя, термометръ ежедневно поднимался на $\frac{1}{2}$ градуса и что среднее ариѳметическое число этихъ 12 различныхъ стояній термометра было $18\frac{3}{4}$ градусовъ. Спрашивается: сколько градусовъ термометръ показывалъ 8-го числа?

Отв. 16.

16. За удачный штурмъ крѣпости ротѣ солдатъ положено дать награжденіе такъ, чтобы тотъ солдатъ, который взошелъ на валъ первымъ, получилъ нѣкоторую сумму денегъ; второй не много менѣе; третій такимъ же числомъ менѣе втораго, какимъ второй менѣе перваго, и т. д. — Когда начали раздѣлять наградныя деньги, то двое изъ солдатъ не могли присутствовать при этой раздачѣ по причинѣ ранъ, и потому части ихъ отдали на сбереженіе двумъ ихъ товарищамъ. Эти послѣдніе, какъ свои деньги, такъ и деньги раненыхъ товарищей положили въ одинъ мѣшокъ, и когда каждый хотѣлъ взять принадлежавшую ему часть, то солдаты, получившіе деньги, забыли сколько каждому назначено было въ награду. Одинъ изъ нихъ получилъ за себя и за товарища 92 рубля, и помнилъ только, что, при штурмѣ крѣпости, онъ взошелъ на валъ вторымъ, а его раненый товарищъ седьмымъ; другой получилъ за себя и за товарища 71 рубль, и зналъ, что самъ взошелъ на валъ одиннадцатымъ, а раненный товарищъ его четвертымъ. Спрашивается: сколько каждому изъ этихъ четырехъ солдатъ слѣдуетъ наградныхъ денегъ?

Отв. Тому, который взошелъ на валъ вторымъ $54\frac{3}{4}$, четвертому $47\frac{3}{4}$, седьмому $37\frac{1}{4}$, а одиннадцатому $23\frac{1}{4}$.

17. Имѣется 18 чиселъ, составляющихъ ариѳметическую прогрессію. Если два средніе члена (т. е. 9-й и 10-й этой прогрессіи сложимъ вмѣстѣ, то получимъ $31\frac{1}{2}$, если же первый и послѣдній члены перемножимъ между собою, то получимъ $85\frac{1}{2}$. Спрашивается: какъ великъ первый членъ этой прогрессіи и какая разность ея?

Отв. 3 и $1\frac{1}{2}$.

18. Двѣ особы выѣхали въ одно время другъ другу на встрѣчу изъ двухъ различныхъ мѣстъ A и B, отстоящихъ одно отъ другаго на 170 миль. Выѣхавшій изъ мѣста B про-

ѣзжаетъ каждыя сутки по 4 мили; а другой въ первый день проѣхалъ только 2 мили, въ каждый же послѣдующій день проѣзжаетъ постоянно $\frac{1}{2}$ мили болѣе, чѣмъ въ предъидущій. Спрашивается: на какомъ разстояніи они встрѣтятся?

Отв. На разстояніи 102 миль отъ мѣста *A*.

19. Нѣкто получаетъ ежегодно жалованья 500 рублей, которые онъ не издерживаетъ, но каждый разъ въ самый день полученія жалованья отдаетъ въ ростъ по 5 процентовъ, которыхъ онъ также не беретъ. Спрашивается: по прошествіи сколькихъ лѣтъ у него составится такимъ образомъ капиталъ въ 6375 рублей, не считая, впрочемъ, процентовъ на проценты?

Отв. По прошествіи 10 лѣтъ.

20. Въ цейхгаузахъ ядра иногда укладываются въ трехсторонныя пирамиды, такъ-что въ верхнемъ слоѣ лежитъ одно ядро, во второмъ 3, въ третьемъ 6, въ четвертомъ 10 и т. д.; словомъ, число ядеръ въ слояхъ, начиная съ верхняго, соотвѣтствуетъ треугольнымъ числамъ 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36 и т. д. — Спрашивается: сколько ядеръ находится въ нижнемъ слоѣ, если бокъ его будетъ содержать n ядеръ, и сколько ядеръ находится во всей пирамидѣ?

Отв. Въ нижнемъ слоѣ $\frac{n(n+1)}{1 \cdot 2}$, а во всей пирамидѣ $\frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$. Напр. если $n = 30$, то въ нижнемъ слоѣ будетъ $\frac{30 \cdot 31}{1 \cdot 2} = 465$ ядеръ, а во всей пирамидѣ будетъ $\frac{30 \cdot 31 \cdot 32}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 4960$ ядеръ.

21. Если же, въ предъидущей задачѣ пирамида будетъ усѣченная и въ каждомъ боку верхняго слоя будетъ находится

$(m+1)$ ядеръ, то сколько ядеръ въ этомъ случаѣ будетъ въ этой усѣченной пирамидѣ?

Отв. $\frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \frac{m(m+1)(m+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$.

22. Иногда же ядра укладываются въ четырехсторонныя пирамиды, такъ-что каждый слой составляетъ квадратъ, а число ядеръ въ каждомъ слоѣ, начиная съ верхняго, соотвѣтствуетъ квадратнымъ числамъ, 1, 4, 9, 16, 25, 36, etc. Спрашивается: если въ боку нижняго слоя находится n ядеръ, слѣдовательно въ цѣломъ нижнемъ слоѣ n^2 ядеръ, то сколько ядеръ будетъ находиться въ цѣлой пирамидѣ, и сколько будетъ находиться оныхъ въ усѣченной пирамидѣ, когда бокъ верхняго слоя будетъ содержать $(m+1)$ ядеръ?

Отв. $\frac{n(n+1)(2n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ ядеръ въ цѣлой пирамидѣ, а въ усѣченной $\frac{n(n+1)(2n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \frac{m(m+1)(2m+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ ядеръ.

23. Когда требуется уложить въ кучи большое число ядеръ, то слоямъ обыкновенно даютъ видъ прямоугольниковъ; въ этомъ случаѣ въ верхнемъ слоѣ будетъ только одинъ рядъ ядеръ, числомъ, напримѣръ, m, во второмъ слоѣ два ряда и въ каждомъ $m+1$ ядеръ, въ третьемъ три ряда и въ каждомъ $m+2$ ядеръ и т. д.; вообще въ каждомъ слоѣ будетъ однимъ рядомъ, а въ каждомъ ряду однимъ ядромъ болѣе, чѣмъ въ слоѣ, непосредственно лежащемъ надъ нимъ, такъ что число ядеръ, содержащееся въ слояхъ, будетъ, начиная съ верхняго, въ слѣдующемъ порядкѣ, m, $2(m+1)$, $3(m+2)$, $4(m+3)$, $5(m+4)$, и проч.; слѣдовательно въ n-мъ слоѣ будетъ $n(m+n-1)$. Спрашивается: сколько ядеръ будетъ находиться въ цѣлой кучѣ, состоящей изъ n слоевъ?

Отв. $\frac{n(n+1)(2n+3m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ (*).

(*) Въ справедливости этой и слѣдующей за нею формулы можно удостовѣриться по способу, показанному въ примѣчаніи на 98-й страницѣ

24. Изъ слоевъ, имѣющихъ видъ прямоугольниковъ, иногда складываютъ другой родъ кучъ, которыя, для равновѣсія, должны быть съ двухъ сторонъ прислонены къ другимъ кучамъ ядеръ или вообще поддерживаемы какимъ-нибудь способомъ. Въ верхнемъ слоѣ подобныхъ кучъ находится одинъ рядъ, имѣющій m ядеръ, во второмъ слоѣ находятся два ряда, въ каждомъ по $m-1$ ядеръ, въ третьемъ три ряда, въ каждомъ по $m-2$ ядеръ и т. д., такъ-что число ядеръ въ слояхъ соотвѣтствуетъ количествамъ m, $2(m-1)$, $3(m-2)$, $4(m-3)$, $5(m-4)$ и проч.; слѣдовательно въ n-мъ слоѣ будетъ находиться $n(m-n+1)$ ядеръ. Спрашивается: сколько ядеръ будетъ находиться въ цѣлой таковой кучѣ, состоящей изъ n слоевъ?

Отв. $\frac{n(n+1)(3m-2n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$.

25. Если подобнаго рода куча только съ одной стороны можетъ быть прислонена, то обыкновенно въ каждый ниже лежащій слой прибавляютъ по одному ряду, но число ядеръ въ каждомъ ряду оставляютъ то же самое, такъ-что число ядеръ каждаго слоя соотвѣтствуетъ количествомъ m, $2m$, $3m$, $4m$, $5m$, и т. д.; слѣдовательно въ n-мъ слоѣ будетъ nm ядеръ. Спрашивается: сколько ядеръ находится въ цѣлой таковой кучѣ?

Отв. $\frac{mn(n+1)}{1 \cdot 2}$.

26. Если число ядеръ въ цѣлой трехсторонней пирамидѣ $= s$, то какое уравненіе должно рѣшить, чтобы опредѣлить число слоевъ, или число ядеръ въ боку нижняго слоя?

Отв. Уравненіе: $n^3 + 3n^2 + 2n - 6s = 0$.

I отд., или формулы эти можно найти помощію неопредѣленныхъ коэфиціентовъ.

27. Какое уравненіе должно рѣшить въ случаѣ четырехсторонной пирамиды?

Отв. $2n^3 + 3n^2 + n - 6s = 0$.

28. Нѣкто пожертвовалъ на лотерею 2 копейки и, не выигравъ въ первый разъ ничего, пожертвовалъ во второй разъ 6 копеекъ; не выигравъ и на этотъ разъ ничего, пожертвовалъ въ третій разъ 18 копеекъ; словомъ, всякій разъ послѣ проигрыша, жертвовалъ втрое болѣе, чѣмъ въ предъидущій. Спрашивается: сколько онъ, продолжая такимъ образомъ, долженъ пожертвовать въ 12-й разъ, и сколько онъ долженъ выиграть, чтобы воротить всю пожертвованную имъ на лотерею сумму денегъ.

Отв. 3542 рубля 94 копейки и 5314 рублей 40 копеекъ.

29. Индійскій королъ Шеранъ, по описанію арабскаго писателя Азефада, позволилъ изобрѣтателю шахматной игры, Зесса, избрать самому награду за эту выдумку. Этотъ послѣдній просилъ сумму пшеничныхъ зеренъ, которая получится, когда за первый квадратъ шахматной доски положатъ 1 зерно, за второй 2, за третій 4 и т. д.; т. е. за каждый изъ 64 квадратовъ вдвое болѣе зеренъ, чѣмъ за предъидущій. Когда начали вычислять, то, къ удивленію короля, оказалась чрезвычайно большая сумма зеренъ. — Какая именно?

Отв. 18446744073709551615; если, по умѣренному вычисленію, въ продолженіе 70 лѣтъ слишкомъ будутъ засѣвать всю твердую землю пшеницею, то едва получится это количество зеренъ.

30. Нѣкто посѣялъ четверть пшеницы и, собранную имъ послѣ жатвы, употребилъ на посѣвъ во второй годъ; жатву этого втораго года употребилъ опять на посѣвъ въ третій

годъ и т. д. Предполагая, что увеличиваніе зерна при каждой жатвѣ было постоянное, спрашивается: во сколько разъ зерно родилось каждый годъ, если въ десятый годъ онъ имѣлъ для посѣва 1048576 четвертей?

Отв. Вчетверо.

31. Въ одной мирной провинціи народонаселеніе увеличивалось каждый годъ въ постоянномъ отношеніи, и притомъ такъ, что въ продолженіе четырехъ лѣтъ народонаселеніе возрасло отъ 10000 до 14641 души. Спрашивается: какою частью народонаселеніе увеличивалось ежегодно?

Отв. Десятою частью.

32. Между 1 и 3 вставить 10 чиселъ такихъ, чтобы составилась геометрическая прогрессія изъ 12 членовъ. Спрашивается: какъ великъ будетъ второй членъ этой прогрессіи?

Отв. $\sqrt[11]{(3)} = 1{,}105....$

33. Найти знаменателя геометрической прогрессіи, состоящей изъ 32 членовъ, которой первый членъ $= 5$, а послѣдній $= 80$. Найти также сумму этой прогрессіи, и опредѣлить двадцатый членъ оной.

Отв. Знаменатель $= 1{,}0935.....$; сумма $= 881{,}62.....$; двадцатый членъ $= 27{,}351.....$

34. Найти семь чиселъ, составляющихъ геометрическую прогрессію и имѣющихъ то свойство, что сумма первыхъ шести $= 157\frac{1}{2}$, а сумма послѣднихъ шести $= 315$?

Отв. $2\frac{1}{2}$, 5, 10, 20, 40, 80, 160.

35. Найти геометрическую прогрессію, состоящую изъ 5 членовъ, такую, чтобы сумма четныхъ членовъ равнялась a, а сумма нечетныхъ была $= b$.

Отв. Означая чрезъ A, B, C, D, E пять членовъ иско-

мой прогрессіи, получимъ средній членъ $C = \frac{-b \pm \sqrt{(b^2 + 4a^2)}}{2}$

отсюда $A = \frac{[a - \sqrt{(a^2 - 4C^2)}]^2}{4C}$, $B = \frac{a - \sqrt{(a^2 - 4C^2)}}{2}$,

$D = \frac{a + \sqrt{(a^2 - 4C^2)}}{2}$, $E = \frac{[a + \sqrt{(a^2 - 4C^2)}]^2}{4C}$.

36. Найти геометрическую прогрессію, состоящую изъ 4-хъ членовъ, такую, чтобы сумма четныхъ членовъ оной равнялась a, а сумма нечетныхъ была $= b$.

Отв. Знаменатель прогрессіи $= \frac{a}{b}$, первый членъ ея $= \frac{b^3}{a^2 + b^2}$; прочіе же члены весьма легко опредѣлить.

37. Найти геометрическую прогрессію, состоящую изъ $2n$ членовъ, такую, чтобы сумма четныхъ членовъ ея равнялась a, сумма нечетныхъ была $= b$.

Отв. Знаменатель прогрессіи $= \frac{a}{b}$, первый же членъ оной

$$= \frac{b^{2n-1}}{a^{2n-2} + a^{2n-4} \cdot b^2 + a^{2n-6} \cdot b^4 + \ldots\ldots + b^{2n-2}}$$

$$= \frac{b^{2n-1}(a^2 - b^2)}{a^{2n} - b^{2n}}.$$

38. Найти геометрическую прогрессію, состоящую изъ шести членовъ, такую, чтобы сумма двухъ среднихъ членовъ равнялась a, а сумма двухъ крайнихъ членовъ была $= b$.

Отв. Означая чрезъ p произведеніе двухъ среднихъ членовъ, получимъ $p = \frac{a^2}{2} \cdot \frac{5a \pm \sqrt{(4ab + 5a^2)}}{5a - b}$. Опредѣливъ p и a, найдемъ два средніе члена $\frac{1}{2}[a - \sqrt{(a^2 - 4p)}]$, $\frac{1}{2}[a + \sqrt{(a^2 - 4p)}]$; прочіе же члены опредѣлятся весьма легко.

39. Найти геометрическую прогрессію такую, чтобы сумма

членовъ ея равнялась a, сумма квадратовъ всѣхъ членовъ была $= b$, а сумма кубовъ ихъ $= c$.

Отв. Знаменатель прогрессіи

$$e = \frac{a^4 + 2ac - 3b^2 \pm \sqrt{[12a\,(ac - b^2)\,(a^3 - c)]}}{a^4 + 3b^2 - 4ac};$$ первый

членъ $= \frac{b\,(1 + e) + a^2\,(1 - e)}{2a}$; зная показателя, первый членъ и сумму членовъ, легко опредѣлить число членовъ и самую прогрессію.

40. Найти такую геометрическую прогрессію, въ которой сумма членовъ равнялась бы a, сумма квадратовъ членовъ была $= c$?

Отв. Знаменатель прогрессіи

$$e = \frac{a^4b - b^3 \pm 2a\sqrt{[(c - a^2b)\,(b^3 - a^2c)]}}{b^3 + a^4b - 2a^2c};$$ первый членъ

$= \frac{b\,(1 + e) + a^2\,(1 - e)}{2a}$. Посредствомъ этихъ извѣстныхъ можно опредѣлить число членовъ и самую прогрессію.

41. Разность ариѳметической прогрессіи, состоящей изъ четырехъ членовъ $= d$, произведеніе всѣхъ членовъ ея $= a$. Спрашивается: какъ найти первый членъ прогрессіи?

Отв. Означая первый членъ чрезъ x, а произведеніе двухъ крайнихъ членовъ чрезъ y, получимъ $x^2 + 3dx = y$; неизвѣстная же величина y дана уравненіемъ $y^2 + 2d^2y = a$. Отсюда получаемъ слѣдующія четыре величины для x:

$$x = -\tfrac{3}{2}\,d \pm \sqrt{[\tfrac{5}{4}\,d^2 + \sqrt{(a + d^4)}]},$$
$$x = -\tfrac{3}{2}\,d \pm \sqrt{[\tfrac{5}{4}\,d^2 + \sqrt{(a + d^4)}]}.$$

42. Разность ариѳметической прогрессіи, состоящей изъ шести членовъ, равняется d, произведеніе всѣхъ членовъ

ея $= a$. Спрашивается: какъ найти первый членъ прогрессіи?

Отв. Означая первый членъ чрезъ x, произведеніе двухъ крайнихъ членовъ чрезъ y, получимъ: $x^2 + 5dx = y$; неизвѣстная же величина y дана уравненіемъ $y^3 + 10d^2y^2 + 24d^4y = a$.

Вообще задачу «найти ариѳметическую прогрессію, состоящую изъ $2m$ членовъ, которой разность дана $= d$, и которая бы имѣла то свойство, чтобы произведеніе всѣхъ членовъ ея равнялось данной величинѣ a» можно привести къ рѣшенію уравненія 2-й и m-й степени. Потому-что, стоитъ только положить $x^2 + (2m - 1)\,dx = y$, то найдемъ для опредѣленія y уравненія m-й степени. (Сравни эту задачу съ задачею 35 на 242 страницѣ.)

ЗАДАЧИ, ОТНОСЯЩІЯСЯ КЪ ВЫЧИСЛЕНІЯМЪ ПРОЦЕНТОВЪ, ДОХОДОВЪ И ДРУГІЯ, ПРИНАДЛЕЖАЩІЯ КЪ ЭТОМУ РОДУ (*).

1. Капиталъ a отданъ въ ростъ, считая проценты на проценты; процентъ равняется p; спрашивается: чему этотъ

(*) Привожу здѣсь только задачи, относящіяся къ вычисленію сложныхъ процентовъ, т. е. такія, въ которыхъ предполагается, что проценты ежегодно присоединяются къ капиталу и также приносятъ проценты, потому-что способъ вычисленія простыхъ процентовъ уже предполагается извѣстнымъ.

капиталъ, увеличиваясь такимъ образомъ, будетъ равняться по прошествіи n лѣтъ?

Отв. $a\left(1+\frac{p}{100}\right)^n$.

2. Капиталъ въ 5000 рублей отданъ въ ростъ, считая проценты на проценты, по 4 процента въ годъ; спрашивается: чему капиталъ этотъ будетъ равняться по прошествіи 40 лѣтъ?

Отв. 24005,103..... рублямъ.

3. Чему будетъ равняться капиталъ въ 3200 рублей, отданный въ ростъ по 3 процента, чрезъ 80 лѣтъ?

Отв. 34050,84..... рублямъ.

4. Нѣкоторый лѣсъ, по оцѣнкѣ, содержитъ 32500 саженей дровъ, и извѣстно изъ опытовъ, что 100 саженей ежегодно увеличиваются 3 саженями. Спрашивается: сколько лѣсъ этотъ будетъ содержать саженей дровъ, по прошествіи 24 лѣтъ, если его не будутъ вырубать?

Отв. 66065,808..... саженей.

5. Въ нѣкоторой провинціи считаютъ 200000 жителей. Если народонаселеніе этой провинціи будетъ ежегодно увеличиваться пятидесятою частью, то спрашивается: какъ велико будетъ число жителей въ этой провинціи по прошествіи 100 лѣтъ?

Отв. Почти 14489276 жителей.

6. Чему будетъ равняться капиталъ въ 12000 рублей по прошествіи 10 лѣтъ, когда онъ отданъ въ ростъ по 6 процентовъ и когда проценты уплачиваются по полугодно.

Отв. Почти $21673\frac{1}{3}$ рублямъ.

7. Чрезъ сколько лѣтъ капиталъ въ 3600 рублей, отдан-

ный въ ростъ по 5 процентовъ, считая проценты на проценты, будетъ равняться тому капиталу, который получится по прошествіи 12 лѣтъ съ 5000 рублей, отданныхъ въ ростъ по 4 процента?

Отв. Почти чрезъ 16 лѣтъ.

8. На сколько лѣтъ долженъ быть отданъ въ ростъ капиталъ a по p процентовъ, чтобы составившійся капиталъ равнялся тому, который получится по прошествіи n лѣтъ съ капитала a', отданнаго въ ростъ по p' процентовъ.

Отв. На $\dfrac{\log a' + n \log\left(1 + \frac{p'}{100}\right) - \log a}{\log\left(1 + \frac{p}{100}\right)}$ лѣтъ.

9. Какъ великъ долженъ быть капиталъ, который бы, будучи отданъ въ ростъ по 4 процента, чрезъ 15 лѣтъ равнялся капиталу, который получится по прошествіи 9 лѣтъ съ 4500 рублей, отданныхъ въ ростъ по 6 процентовъ?

Отв. Почти 4221 рубль.

10. Какъ великъ долженъ быть капиталъ a, чтобы, будучи отданъ въ ростъ по p процентовъ, чрезъ n лѣтъ равнялся капиталу, который получится по прошествіи n' лѣтъ съ капитала a', отданнаго въ ростъ по p' процентовъ.

Отв. $\log a = \log a' + n' \log\left(1 + \frac{p'}{100}\right) - n \log\left(1 + \frac{p}{100}\right)$.

Это уравненіе опредѣляетъ $\log a$, послѣ чего не трудно, посредствомъ логариѳмическихъ таблицъ, найти и самое a.

11. Какъ велики должны быть проценты p, чтобы капиталъ a, отданный въ ростъ по этимъ процентамъ, чрезъ n лѣтъ равнялся капиталу, который получится съ капитала a', отданнаго въ ростъ по p' процентовъ, чрезъ n' лѣтъ.

Отв. $\log\left(1 + \frac{p}{100}\right) = \dfrac{\log a' + n' \log\left(1 + \frac{p'}{100}\right) - \log a}{n}$

Отсюда легко опредѣлить и самое p.

12. По векселю въ 7963 рубля заимодавецъ долженъ получать ежегодно по 5 процентовъ. Если ему по прошествіи 5 лѣтъ будетъ заплачено 576 рублей, а по прошествіи 8 лѣтъ 498 рублей, то спрашивается: какъ великъ будетъ остатокъ долга по прошествіи 10 лѣтъ, считая проценты на проценты?

Отв. Почти 11696 рублей.

13. Какъ велики будутъ полугодовые проценты съ нѣкотораго капитала, когда годовые проценты равняются 5, и когда при этомъ будутъ считать и проценты на проценты? И какъ велики, при томъ же предположеніи, за четверть года?

Отв. Полугодовые проценты $= 2{,}4695.....$, а за четверть года процентъ будетъ $= 1{,}2272.....$

14. Если годовой процентъ $= p$; спрашивается: какъ великъ процентъ за $\frac{1}{n}$-ю часть года?

Отв. $100\left[\sqrt[n]{\left(1+\frac{p}{100}\right)}-1\right]$.

15. Чрезъ сколько времени капиталъ, отданный въ ростъ по 4 процента и считая проценты на проценты, удвоится, и чрезъ сколько времени онъ будетъ втрое болѣе?

Отв. Между 17 и 18 годомъ капиталъ удвоится, а между 28 и 29 годомъ онъ будетъ втрое болѣе.

16. Чрезъ сколько времени капиталъ, отданный въ ростъ по p процентовъ, будетъ въ m разъ болѣе?

Отв. Чрезъ $\dfrac{\log m}{\log\left(1+\frac{p}{100}\right)}$ лѣтъ.

17. Ростовщикъ, давая въ займы 600 рублей, взялъ вексель въ 800 рублей, по которому должно быть уплачено чрезъ три года, безъ процентовъ. Спрашивается: какъ вели-

ки проценты, получаемые имъ по этому векселю, считая и проценты на проценты?

Отв. Немного болѣе 10 процентовъ.

18. Если капиталъ a, по прошествіи n лѣтъ, долженъ возрасти до капитала A, то спрашивается: какъ велики должны быть проценты?

Отв. $\log\left(1+\frac{p}{100}\right)=\frac{\log A-\log a}{n}$, гдѣ p означаетъ проценты.

19. Нѣкто долженъ по прошествіи 6 лѣтъ заплатить 3750 рублей. Спрашивается: сколько онъ вмѣсто этой суммы долженъ заплатить теперь, дѣлая учетъ по 4 процента въ годъ и взявъ въ соображеніе проценты на проценты?

Отв. Почти $2963\frac{2}{3}$ рубля.

20. Какъ велико настоящее достоинство (der baare Werth) капитала a, который долженъ быть уплаченъ чрезъ n лѣтъ, считая годовой процентъ p?

Отв. $\frac{a}{\left(1+\frac{p}{100}\right)^n}$.

21. Сколько должно заплатить за каменоломню, которая только по прошествіи 20-го года дастъ прибыли 500 рублей, если желаемъ, чтобы употребленный на покупку капиталъ приносилъ 4 процента?

Отв. Немного болѣе 228 рублей.

22. Въ нѣкоторомъ городѣ считаются 20000 жителей, и извѣстно, что число ихъ постоянно увеличивалось $\frac{3}{100}$ ежегодно; спрашивается: какъ велико было число жителей 10 лѣтъ назадъ?

Отв. 14882.

23. Нѣкоторый лѣсъ оцѣненъ въ 30000 саженей дровъ, и извѣстно, что онъ постоянно увеличивался 2 процентами; спрашивается: сколько этотъ лѣсъ содержалъ саженей дровъ 10 лѣтъ назадъ?

Отв. 24610 саженей.

24. Для покупки имѣнія явились три охотника. Первый предлагаетъ за имѣніе 30000 рублей чистыми деньгами; второй обязуется заплатить 33500 рублей по прошествіи трехъ лѣтъ; третій наконецъ предлагаетъ 40000 рублей, обязуясь заплатить ихъ чрезъ 7 лѣтъ. Спрашивается: который изъ трехъ покупщиковъ предлагалъ наибольшую сумму, предполагая, что капиталъ могъ бы доставлять 5 процентовъ, и принимая въ соображеніе проценты на проценты? — И чѣмъ эта наибольшая сумма превышаетъ каждую изъ остальныхъ двухъ?

Отв. Сумма, предлагаемая первымъ покупщикомъ, есть наибольшая и превышаетъ сумму втораго 1061, а сумму третьяго 1573 рублями (почти).

25. Во сколько лѣтъ число жителей нѣкотораго города увеличится въ десять разъ, если ежегодное увеличиваніе составляетъ 3 души на 100?

Отв. Почти въ 78 лѣтъ.

26. Капиталъ въ 800 рублей въ продолженіе 6 лѣтъ увеличился до 3600 рублей. Спрашивается: по какимъ процентамъ этотъ капиталъ былъ отданъ въ ростъ?

Отв. Почти по $28\frac{1}{2}$ процентамъ.

27. Капиталъ a отданъ въ ростъ по p процентовъ и по прошествіи каждаго года увеличивается пріобщаемыми процентами; сверхъ этого, ежегодно къ этому капиталу прибавляютъ или ежегодно отъ этого капитала берутъ постоянно

сумму b. Спрашивается: какъ великъ будетъ капиталъ этотъ по прошествіи n лѣтъ?

Отв. Въ первомъ случаѣ капиталъ будетъ =

$$a\left(1+\frac{p}{100}\right)^n+\frac{100b\left\{\left(1+\frac{p}{100}\right)^n-1\right\}}{p},$$ а во второмъ

случаѣ $=a\left(1+\frac{p}{100}\right)^n-\frac{100b\left\{\left(1+\frac{p}{100}\right)^n-1\right\}}{p}$

28. Капиталъ въ 6000 рублей отданъ въ ростъ по 5 процентовъ, считая проценты на проценты, и по прошествіи каждаго года, сверхъ пріобщаемыхъ процентовъ, увеличивается еще 500 рублями. Спрашивается: чему этотъ капиталъ будетъ равняться по прошествіи 10 лѣтъ?

Отв. Почти $16062\frac{7}{24}$ рублямъ.

29. Чему будетъ равняться капиталъ въ 3740 рублей, отданный въ ростъ по 4 процента, по прошествіи 8 лѣтъ, если онъ ежегодно будетъ увеличиваться 450 рублями?

Отв. Почти $9264\frac{5}{6}$ рублямъ.

30. По векселю въ 15467 рублей заимодавецъ долженъ получать ежегодно по 5 процентовъ; — должникъ ежегодно уплачиваетъ по 600 рублей; спрашивается: чему будетъ равняться остатокъ долга по прошествіи 10 лѣтъ?

Отв. Почти 17647 рублямъ.

31. Отъ капитала въ 5000 рублей, отданнаго въ ростъ по 5 процентовъ, ежегодно берутъ по 400 рублей; спрашивается: какъ великъ будетъ остатокъ по прошествіи 10 лѣтъ?

Отв. Почти 3113 рублямъ.

32. Нѣкто обязанъ, семь лѣтъ сряду, въ началѣ каждаго года платить по 4000 рублей; но онъ этого обязательства

не выполнилъ. Спрашивается: какъ великъ будетъ его долгъ въ началѣ седьмаго года, считая по 4 процента на 100?

Отв. Почти 31593 рубля.

33. Нѣкто отдалъ капиталъ въ 30000 рублей въ ростъ по 4 процента, и каждый годъ изъ процентовъ беретъ 800 рублей, остальное же присовокупляетъ къ капиталу. Спрашивается: какъ великъ будетъ капиталъ по прошествіи 15 лѣтъ?

Отв. Почти $38009\frac{5}{12}$ рублей.

34. Нѣкто отдалъ весь свой капиталъ, составляющій 100000 рублей, въ ростъ по 5 процентовъ; но этихъ процентовъ съ капитала недостаточно на его годовыя издержки, ибо онъ ежегодно издерживаетъ 6000 рублей, а потому онъ каждый годъ беретъ отъ капитала столько, сколько нужно, чтобы вмѣстѣ съ процентами составилось 6000 рублей. Спрашивается: по прошествіи сколькихъ лѣтъ онъ проживаетъ весь свой капиталъ?

Отв. По прошествіи 36—37 лѣтъ.

35. Капиталъ a отданъ въ ростъ по p процентовъ; спрашивается: по прошествіи какого времени этотъ капиталъ будетъ равняться капиталу a', если капиталъ a, сверхъ пріобщенія къ нему процентовъ и процентовъ на проценты, ежегодно будетъ увеличиваемъ или уменьшаемъ извѣстною суммою b?

Отв. Означая чрезъ n число искомыхъ лѣтъ, въ первомъ случаѣ $n = \frac{\log(a'p + 100b) - \log(ap + 100b)}{\log(100 + p) - 2}$, а во второмъ случаѣ $n = \frac{\log(a'p - 100b) - \log(ap - 100b)}{\log(100 + p) - 2}$.

36. Если же, въ предъидущей задачѣ, ежегодно изъ капитала будемъ брать сумму b, и если b болѣе процентовъ съ

капитала a, то спрашивается: чрезъ сколько лѣтъ капиталъ этотъ уничтожится?

Отв. Означая, какъ выше, чрезъ n число искомыхъ лѣтъ,

$$n = \frac{\log b - \log (100b - ap) + 2}{\log (100 + p) - 2}.$$

37. Чему равняется истинное достоинство (der baare Werth) w годоваго дохода r, которымъ имѣетъ пользоваться n лѣтъ, считая процентъ p?

$$\text{Отв. } w = \frac{100 \left[\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n - 1\right] r.}{p \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n}$$

38. Нѣкто имѣющій право пользоваться, въ продолженіи 6 лѣтъ годовымъ доходомъ въ 500 рублей, желаетъ продать это право; спрашивается: сколько ему будетъ слѣдовать чистыми деньгами, если будемъ считать по $3\frac{1}{2}$ процента на сто?

Отв. Почти $2664\frac{7}{24}$ рубля.

39. Чему равняется истинное достоинство годоваго дохода въ 350 рублей, которымъ имѣемъ пользоваться 8 лѣтъ, если будемъ считать по 4 процента на сто?

Отв. Немного болѣе $2356\frac{11}{24}$ рублей.

40. Сколько должно заплатить за годовой доходъ въ 400 рублей, предоставляемый на 12 лѣтъ, если будемъ считать по 3 процента на сто?

Отв. Немного болѣе $3981\frac{7}{12}$ рубля.

41. Если истинное достоинство годоваго дохода r, которымъ имѣютъ право пользоваться n лѣтъ, равняется w, то спрашивается: какъ великъ этотъ годовой доходъ?

$$\text{Отв. } r = \frac{\frac{pw}{100}\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n}{\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n - 1}.$$

42. Долгъ въ 1200 рублей должно уплатить, по равнымъ частямъ, въ семь годовыхъ терминовъ. Спрашивается: какъ велика должна быть часть, уплачиваемая каждый годъ, если будемъ считать по 4 процента на сто?

Отв. Почти 200 рублей.

43. Опредѣлить величину годоваго дохода, когда право пользоваться имъ 13 лѣтъ равняется чистому капиталу въ 20000 рублей, считая по 4 процента на сто?

Отв. Почти 2003 рубля.

44. Крестьяне, занявъ у своего помѣщика 20000 рублей, заложили ему лѣсъ, приносящій ежегодно 1500 рублей чистаго дохода. Спрашивается: сколько лѣтъ помѣщикъ имѣетъ право пользоваться этимъ лѣсомъ за свой капиталъ, если будетъ считать по 5 процентовъ на сто?

Отв. Почти 22 года.

45. Нѣкто, за 34580 рублей желаетъ пріобрѣсти право пользоваться годовымъ доходомъ въ 2000 рублей; спрашивается: на сколько лѣтъ ему слѣдуетъ предоставить это право, если будемъ считать по 4 процента на сто?

Отв. Почти на 30 лѣтъ.

46. Сколько лѣтъ можно пользоваться нѣкоторымъ годовымъ доходомъ r, если онъ равняется чистому капиталу w, считая по p процентовъ на сто?

Отв. $\log n = \dfrac{\log r - \log (100\,r - pw) + 2}{\log (100 + p) - 2}$.

47. Опредѣлить годовой доходъ r', которымъ бы можно было пользоваться данное число лѣтъ n', и который бы истин-

нымъ достоинствомъ равнялся годовому доходу r, предоставляемому на n лѣтъ, считая по p процентовъ на сто?

$$Отв.\ r' = \frac{\left\{\left(1+\frac{p}{100}\right)^{n}-1\right\}\left(1+\frac{p}{100}\right)^{n'-n}}{\left(1+\frac{p}{100}\right)^{n'}-1}\ r.$$

48. Если же искомымъ годовымъ доходомъ r будемъ имѣть право пользоваться n' лѣтъ, но только по прошествіи m лѣтъ, то спрашивается: какъ великъ будетъ въ этомъ случаѣ этотъ годовой доходъ r'?

$$Отв.\ r = \frac{\left\{\left(1+\frac{p}{100}\right)^{n}-1\right\}\left(1+\frac{p}{100}\right)^{n'-n+m}}{\left(1+\frac{p}{100}\right)^{n'}-1}\ r.$$

49. Чему равняется истинное достоинство годоваго дохода, которымъ имѣютъ право пользоваться n лѣтъ и который увеличивается въ геометрическомъ содержаніи; впрочемъ извѣстно, что въ первый годъ доходъ $= r$, знаменатель содержанія $= e$, а проценты считаются по p на сто?

$$Отв.\ \frac{r\left\{e^{n}-\left(1+\frac{p}{100}\right)^{n}\right\}}{\left\{e-\left(1+\frac{p}{100}\right)\right\}\left(1+\frac{p}{100}\right)^{n}}\ или\ \frac{r\left\{\frac{e^{n}}{\left(1+\frac{p}{100}\right)^{n}}-1\right\}}{e-\left(1+\frac{p}{100}\right)}.$$

Этотъ послѣдній видъ удобнѣе для вычисленія посредствомъ логариѳмовъ.

50. Чему равняется истинное достоинство годоваго дохода, получаемаго n лѣтъ, если онъ увеличивается въ ариѳметической прогрессіи, r, $2r$, $3r$, $4r$, и т. д.; т. е. когда, по про-

шествіи перваго года доходъ $= r$, по прошествіи втораго $= 2r$, и т. д., считая по p процентовъ на сто?

Отв. Означая чрезъ w истинное достоинство постояннаго дохода r, получаемаго n лѣтъ сряду, при доходѣ, увеличивающемся въ вышеозначенной прогрессіи истинное достоинство будетъ $= \frac{100}{p}\left\{w\left(1+\frac{p}{100}\right) - \frac{nr}{\left(1+\frac{p}{100}\right)^n}\right\}$.

. . . . . .

Желающіе имѣть полное понятіе объ этой главѣ, могутъ читать слѣдующія сочиненія: Флоренкура Abhandlungen aus der juristischen und politischen Rechenkunst, Тетена Einleitung zur Berechnung der Leibrenten und Anwartschaften и Христіани Anfangsgründe der Staatsrechenkunst. Между этими тремя сочиненіями подробнѣйшее, по моему мнѣнію, есть Тетена. Для должностныхъ особъ, которыя не желаютъ вникать въ этотъ предметъ есть небольшое сочиненіе, изданное Лангедорфомъ, подъ заглавіемъ: Arithmetische Abhandlungen über juristische, staats- und forstwissenschaftliche Fragen, Mortalität, Bevölkerung, u. s. w.

Замѣчаніе для преподающаго: Послѣднюю задачу можно легче рѣшить помощію геометрическихъ прогрессіи, и она собственно не принадлежитъ сюда, но есть только частный случай другаго болѣе общаго. Положимъ, что $A + Bx + Cx^2 + Dx^3 +$ etc. есть доходъ по прошествіи неопредѣленнаго x-го года; то истинное достоинство дохода за этотъ годъ $= \left(1+\frac{p}{100}\right)^{-x}(A + Bx + Cx^2 + Dx^3 +$ etc.) и слѣдо-

вательно $\Sigma \left(1 + \frac{p}{100}\right)^{-x} (A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{etc.})$ будетъ изображать истинное достоинство всего дохода, гдѣ Σ есть знакъ суммы. Этотъ интегралъ можетъ быть опредѣленъ. Смотри: Traité du calcul différences et des séries, par Lacroix, p. 85 § 953 втораго изданія). Въ вышеупомянутой задачѣ $B = r$, а A, C, D, etc. $= 0$.

ЗАДАЧИ, ОТНОСЯЩІЯСЯ КЪ ПЕРЕСТАНОВЛЕНІЯМЪ, СОЕДИНЕНІЯМЪ И СОПРЯЖЕНІЯМЪ, РАВНО И КЪ ВЫЧИСЛЕНІЮ ВѢРОЯТНОСТЕЙ.

1. Сколькими образами 8 особъ, стоящихъ рядомъ, могутъ перемѣнить свои мѣста, т. е. каждый разъ стать въ иномъ порядкѣ?

Отв. 40320-ю.

2. Сколько перестановленій даютъ 24 буквы?

Отв. 620448401733239439360000. Всѣ люди на цѣломъ земномъ шарѣ, по примѣрному вычисленію, не написали бы всѣхъ перестановленій 24 буквъ въ тысячу мильоновъ лѣтъ, хотя бы каждый человѣкъ писалъ ежедневно 40 страницъ, а на каждой страницѣ 40 различныхъ перестановленій.

3. Сколько между всѣми перестановленіями буквъ *abcdefg* существуетъ такихъ, которыя начинаются одною изъ буквъ *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*?

Отв. 720.

4. Сколько такихъ, которыя начинаются буквами ab? сколько буквами abc? сколько буквами $abcd$?

Отв. 120 буквами ab; 24 буквами abc и 6 буквами $abcd$.

5. Сколько такихъ, въ которыхъ буквы a, b, c, d находятся вмѣстѣ и притомъ въ показанномъ здѣсь порядкѣ.

Отв. 24.

6. Сколько такихъ, въ которыхъ буквы a, b, c, d находятся вмѣстѣ, не обращая вниманія на порядокъ ихъ?

Отв. 576.

7. Сколько между всѣми перестановленіями выраженія $a^3b^5c^4$ существуютъ такихъ, которыя начинаются c?

Отв. 504.

8. Сколько такихъ, которыя начинаются a^2b^2c?

Отв. 140.

9. Сколько такихъ, въ которыхъ a должно занимать извѣстное мѣсто, напр. четвертое?

Отв. 6930.

10. Чему равняется сумма цифръ во всѣхъ различныхъ перестановленіяхъ *совокупленія цифръ* (Ziffercomplexion) 12234?

Отв. 720.

11. Чему равняется сумма каждаго вертикальнаго столбца, когда совокупленія будемъ подписывать одно подъ другимъ?

Отв. 144.

12. Чему равняется сумма каждаго вертикальнаго столбца, когда всѣ перестановленія совокупленія цифръ 2557789 будутъ подписаны одно подъ другимъ?

Отв. 7740.

13. Сколько въ 90 нумерахъ содержится амбъ, тернъ, кватернъ и квинтъ?

Отв. 4005 амбъ, 117480 тернъ, 2555190 кватернъ и 43949268 квинтъ.

14. Сколько въ 60 нумерахъ содержится амбъ, тернъ, кватернъ и квинтъ?

Отв. 1770 амбъ, 34220 тернъ, 487635 кватернъ и 5461512 квинтъ.

15. Изъ пикетной игры, состоящей изъ 32 стасованныхъ картъ, должно, не выбирая и на угадъ, выдернуть 15 картъ. Спрашивается: сколькими равно возможными образами эти выдернутыя карты могутъ быть соединены?

Отв. 565722720 образами.

16. Произведеніе $abcd$ тремя образами можетъ быть разложено на меньшія произведенія, каждое изъ двухъ множителей, а именно: на $ab \times cd$, $ac \times bd$, $ad \times bc$; произведеніе $abcdef$ допускаетъ 15 таковыхъ разложеній, а именно: $ab \times cd \times ef$, $ab \times ce \times df$, $ab \times cf \times de$, и т. д. Спрашивается: сколькими образами произведеніе $abcdefg$ etc., содержащее $2n$ множителей a, b, c, d, e, f, g, etc., можетъ быть разложено на таковыя произведенія изъ двухъ множителей?

Отв. $\frac{(n+1)\ (n+2)\ \ldots\ (2n-1)\ 2n}{(1\ .\ 2)^n}$ образами.

17. Сколькими образами произведеніе $abcdefg$ etc., состоящее изъ $3n$ множителей a, b, c, d, e, f, g, etc., можетъ быть разбито на произведенія, изъ которыхъ каждое содержало бы три данные множителя?

Отв. $\frac{(n+1)\ (n+2)\ \ldots\ (3n-1)\ 3n}{(1\ .\ 2\ .\ 3)^n}$ образами.

18. Сколькими образами произведеніе $abcdefg$ etc., состоящее изъ mn множителей, можетъ быть разбито на произведенія, изъ которыхъ каждое содержало бы m данныхъ множителей?

Отв. $\frac{(n+1)\ (n+2)\ \ldots\ (mn-1)\ mn}{(1\ .\ 2\ .\ 3\ \ldots\ m)^n}$ образами.

19. Всякое цѣлое число N бываетъ или простое или есть произведеніе нѣсколькихъ простыхъ чиселъ равныхъ или неравныхъ. Слѣдовательно, когда a, b, c, etc., означаютъ первыя числа, то вообще можно положить $N = a^m . b^n . c^p .$ etc., разумѣя подъ m, n, p, etc. всѣ возможныя цѣлыя числа, включая и нуль. Спрашивается, какъ найти всѣ возможныя числа, на которыя бы N дѣлилось на-цѣло? — И сколько N будетъ имѣть таковыхъ дѣлителей?

Отв. Предполагая для краткости, что $1 + a + a^2 + \ldots + a^m = A$, $1 + b + b^2 + \ldots + b^n = B$, $1 + c + c^2 + \ldots + c^p = C$ etc., члены произведенія $ABCD$ etc., дадутъ всѣхъ дѣлителей числа N; число же этихъ дѣлителей $= (m + 1)(n + 1)(p + 1)$ etc. Напр. $360 = 2^3 2^2 . 5^1$, то произведеніе $4 . 3 . 2 = 24$ изображаетъ число всѣхъ дѣлителей 360, а члены произведенія $(1 + 2 + 4 + 8)(1 + 3 + 9)(1 + 5)$ даютъ самыхъ дѣлителей, а именно: 1, 2, 4, 8, 3, 6, 12, 24, 9, 18, 36, 72, 5, 10, 20, 40, 15, 30, 60, 120, 45, 90, 180, 360.

20. Какъ найти такія числа, которыя имѣли бы данное число n дѣлителей (не болѣе и не менѣе)?

Отв. Означимъ чрезъ a, b, c, etc. произвольныя простыя числа. Когда n есть простое число, то a^{n-1} будетъ изображать число, имѣющее требуемое свойство. Если же n есть сложное число, то должно разбить оное на его множителей, m', m'', m''', etc., которые могутъ быть простые или сложные; и произведеніе $a^{m'-1} . b^{m''-1} . c^{m'''-1} .$ etc. будетъ число, имѣющее требуемое свойство.

21. Полнымъ полиномомъ N-й степени, относительно n величинъ x, y, z, etc., мы назовемъ такое цѣлое алгебраическое выраженіе, которое заключало бы всѣ возможныя соединенія этихъ n величинъ, начиная отъ измѣренія 0 до измѣренія n, включительно. Слѣдовательно, напр. полный полиномъ 4-й

степени относительно двухъ количествъ x и y будетъ: $a + bx + b'y + cx^2 + c'xy + c''y^2 + dx^3 + d'x^2y + d''xy^2 + d'''y^3 + ex^4 + e'x^3y + e''x^2y^2 + e'''xy^3 + e''''y^4$. Спрашивается: изъ сколькихъ членовъ будетъ состоять полный полиномъ N-й степени, заключающій въ себѣ n величинъ?

Отв. Изъ $\frac{(N+1)(N+2)(N+3)\ldots\ldots(N+n)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots n}$ членовъ.

22. Сколько въ таковомъ полиномѣ останется членовъ, когда отбросимъ всѣ члены, раздѣляющіеся на x^p?

Отв. $$\frac{(N+1)(N+2)(N+3)\ldots\ldots(N+n)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots n} - \frac{(N-p+1)(N-p+2)(N-p+3)\ldots(N-p+n)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots n}.$$

23. Сколько въ ономъ же останется членовъ, когда отбросимъ всѣ члены, раздѣляющіеся на x^p и y^q?

Отв. $$\frac{(N+1)(N+2)(N+3)\ldots\ldots(N+n)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots n} - \frac{(N-p+1)(N-p+2)(N-p+3)\ldots(N-p+n)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots n} - \frac{(N-q+1)(N-q+2)(N-q+3)\ldots(N-q+n)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots n} + \frac{(N-p-q+1)(N-p-q+2)\ldots(N-p-q+n)}{1 \cdot 2 \ldots\ldots n}$$

24. Предполагая, что между n равно возможными случаями существуетъ m случаевъ, благопріятствующихъ какому-нибудь событію, слѣдовательно $n - m$ неблагопріятствующихъ ему. Спрашивается: какъ велика вѣроятность, что это событіе случится или нѣтъ?

Отв. Вѣроятность, что событіе случится $= \frac{m}{n}$, а вѣроятность противнаго $= \frac{n-m}{n}$.

Что будутъ означать эти выраженія, когда $m = 0$? и когда $m = n$?

25. Въ прежней берлинской лотереѣ изъ 90 нумеровъ выдергивали на удачу 5, которые считались выигрышными. Спрашивается: если кто-нибудь выберетъ по произволенію 12 изъ этихъ 90 нумеровъ и всѣ содержащіяся въ оныхъ амбы, терны, кватерны и квинты оставитъ за собою, то какъ велики будутъ вѣроятности, что онъ выиграетъ амбу, терну, кватерну или квинту?

Отв. Вѣроятность амбы $= \frac{44}{267}$; для терны $= \frac{5}{267}$; для кватерны $= \frac{5}{5162}$, а для квинты $= \frac{2}{110983}$.

26. Нѣкто хотѣлъ въ прежней берлинской лотереѣ изъ 90 нумеровъ взять столько ерлыковъ, каждый въ пять нумеровъ, чтобы пять выигрышей навѣрное находились на одномъ изъ его ерлыковъ. Спрашивается: сколько онъ долженъ былъ всего взять ерлыковъ? сколько между этими ерлыками было такихъ, которые содержали только четыре выигрыша? сколько ерлыковъ съ двумя и тремя выигрышами? сколько ерлыковъ съ однимъ выигрышемъ? и наконецъ сколько ерлыковъ на которыхъ не было ни одного выигрыша?

Отв. Число ерлыковъ, которые онъ долженъ былъ взять $= 43949268$; въ томъ числѣ было 425 съ кватернами; 35700 съ тернами; 987700 съ амбами; 10123925 съ простыми выигрышами и наконецъ 32801517 пустыхъ.

27. Какъ вѣроятность изъ 13 различныхъ нумеровъ выдернуть 6 назначенныхъ, содержится къ вѣроятности изъ пикетной игры, состоящей изъ 32 вартъ, выдернуть 8 данныхъ, предполагая, что какъ карты, такъ и нумера перемѣшаны надлежащимъ образомъ и выдергиваются на удачу?

Отв. Вѣроятности содержатся какъ 11 къ 67425 (*).

(*) Въ исчисленіи вѣроятностей тѣ игры почитаются одинаково выгодными, въ которымъ, при одинаковыхъ выигрышахъ, вклады, помноженные

28. Сколькими образами 40 различныхъ шаровъ можно раздѣлить на двѣ кучи такъ, чтобы въ одной изъ нихъ было 33, а въ другой 7 шаровъ?

Отв. 18643560 образами.

29. Сколькими образами 21 различныхъ шаровъ можно раздѣлить на 3 кучки въ 3, 7 и 11 шаровъ?

Отв. 42325920 образами.

30. Сколькими образами 19 различныхъ шаровъ можно раздѣлить на 4 кучки въ 2, 4, 5 и 8 шаровъ?

Отв. 523783260 образами.

31. Сколькими различными образами можно изъ пикетной игры, состоящей изъ 32 картъ, выдернуть сперва 12, а потомъ изъ остальныхъ 20-ти еще 9 картъ? Или, что все то же, сколькими образами 32 карты можно раздѣлить на три части такія, чтобы первая состояла изъ 12, вторая изъ 9, а третья изъ 11 картъ?

Отв. 37924165406400 образами.

32. Въ пикетной игрѣ каждый изъ играющихъ получаетъ 12 картъ, остальныя же 8 остаются для прикупки. Спрашивается: сколько различныхъ игръ можетъ быть при таковомъ раздѣленіи картъ?

Отв. 28443124054800.

на вѣроятности соотвѣтствующихъ имъ выигрышей равны между собою. Положимъ, что кто-нибудь бьется объ закладъ изъ 13 нумеровъ выдернуть 6 данныхъ, а кто-либо другой бьется объ закладъ изъ 32 картъ выдернуть 8 данныхъ картъ, то, въ случаѣ выигрыша, оба получаютъ одинаковую сумму; предположивъ, что игры обоихъ равно выгодны. Спрашивается: въ какомъ содержаніи должны находиться ихъ вклады? — *Отв.* Вклады ихъ должны содержаться какъ 11 къ 67425.

Примѣчаніе переводчика.

33. Сколькими различными образами 52 карты могутъ раздѣлиться между четырьмя игроками въ вистъ? Или, что все то же, сколькими различными образами 52 карты могутъ быть раздѣлены на 4 равныя части, каждыя изъ 13 картъ?

Отв. 8565126197851151797861440000 образами.

34. Какъ велика вѣроятность, что изъ 30 нумеровъ, взятыхъ въ прежней берлинской лотереѣ, выйдетъ ровно одинъ нумеръ?

Отв. $\frac{28025}{84194}$ или почти $\frac{1}{3}$.

35. Какъ велика вѣроятность, что изъ этихъ взятыхъ 30 нумеровъ выйдутъ ровно два?

Отв. $\frac{171100}{505164}$ или немного болѣе $\frac{1}{3}$.

36. Какъ велика вѣроятность, что изъ этихъ 30 нумеровъ выйдутъ ровно три?

Отв. $\frac{82600}{505164}$ или почти $\frac{8}{49}$.

37. Какъ велика вѣроятность, что всѣ вынимаемые пять нумеровъ будутъ заключаться въ этихъ 30 нумерахъ?

Отв. $\frac{273}{84194}$ или почти $\frac{1}{308}$.

38. Изъ перетасованной пикетной игры должно выдернуть на удачу 9 картъ; спрашивается: какъ векика вѣроятность, что въ числѣ выдернутыхъ картъ будутъ находиться 5 опредѣленной масти, напр. трефовой?

Отв. $\frac{12397}{584350}$ или почти $\frac{1}{47}$.

39. Какъ велика вѣроятность, что изъ 5 нумеровъ взятыхъ въ прежней берлинской лотерѣе, выйдутъ ровно 3 нумера?

Отв. $\frac{2975}{3662439}$ или почти $\frac{1}{1231}$.

40. Какъ велика вѣроятность, что два событія, изъ которыхъ вѣроятность одного $\frac{m}{n}$, а другаго $= \frac{m'}{n'}$, случатся то и другое?

Отв. $\frac{m}{n} \cdot \frac{m'}{n'} = \frac{mm'}{nn'}$. Почему?

41. Какъ велика вѣроятность, что три событія, которыхъ относительныя вѣроятности суть $\frac{m}{n}$, $\frac{m'}{n'}$, $\frac{m''}{n''}$, случатся всѣ три?

Отв. $\frac{m}{n} \cdot \frac{m'}{n'} \cdot \frac{m''}{n''} = \frac{mm'm''}{nn'n''}$.

42. Въ урнѣ находятся 25 шара, а именно: 6 бѣлыхъ, 8 черныхъ и 10 красныхъ; изъ этой урны должно сперва вынуть 7 шаровъ, а потомъ изъ остальныхъ 17-ти еще три шара на удачу. Спрашивается: какъ велика вѣроятность, что первые 7 шаровъ будутъ красные, а послѣдніе 3 шара будутъ бѣлые?

Отв. $\frac{5}{490314}$.

43. Сколько различныхъ *выпадокъ* (jets, Würfe) можетъ произойти, бросая двѣ, три, четыре и вообще n косточекъ (предполагая, что оныя имѣютъ 6 граней)?

Отв. Отъ двухъ косточекъ 36, отъ трехъ 216, отъ четырехъ 1296 и вообще отъ n косточекъ 6^n выпадокъ.

44. Какъ велика вѣроятность, четырью косточками бросить 4 равныя очка?

Отв. $\frac{1}{216}$.

45. Какъ велика вѣроятность тремя косточками бросить пашъ, т. е. два равныя очка (не болѣе)?

Отв. $\frac{5}{12}$.

46. Какъ велика вѣроятность, четырью косточками бросить два равныя очка, не болѣе, и такъ, чтобы на остальныхъ двухъ косточкахъ были не равныя очки? Какъ велика вѣроятность, при тѣхъ же условіяхъ, для пяти, шести и семи косточекъ? Наконецъ, какъ велика эта вѣроятность для восьми косточекъ?

Отв. Для четырехъ косточекъ искомая вѣроятность $= \frac{5}{9}$, для пяти косточекъ $= \frac{25}{54}$, для шести $= \frac{25}{108}$, для семи $= \frac{35}{648}$; для восьми $= 0$, т. е. этотъ случай невозможенъ.

47. Какъ велика вѣроятность, четырью косточками бросить терну, т. е. три равныя очка, не болѣе?

Отв. $\frac{5}{54}$.

48. Какъ велика вѣроятность, пятью косточками бросить три равныя очка, не болѣе, и такъ, чтобы на остальныхъ двухъ косточкахъ были неравныя очки? Какъ велика вѣроятность, при тѣхъ же условіяхъ, для шести, семи и восьми косточекъ? Наконецъ, какъ велика эта вѣроятность для десяти косточекъ?

Отв. Для пяти косточекъ искомая вѣроятность $= \frac{25}{162}$; для шести $=$ также $\frac{25}{162}$, для семи $= \frac{175}{1944}$, для восьми $= \frac{35}{1458}$; для девяти $= 0$, т. е. этотъ случай невозможенъ.

49. Что вѣроятнѣе: тремя косточками бросить двѣ шестерки, или изъ стасованной пикетной игры выдернуть на удачу три карты одной масти?

Отв. Первое вѣроятнѣе, и вѣроятность перваго случая относится къ вѣроятности втораго какъ 755 къ 504.

50. Что вѣроятнѣе: двадцатью косточками бросить ровно 8 одинаковыхъ очковъ и при томъ такъ, чтобы на остальныхъ косточкахъ были неравныя очки, или изъ перетасован-

ной колоды, состоящей изъ 52 картъ, выдернуть 5 одинаковой масти?

Отв. Второй случай вѣроятнѣе, и вѣроятность втораго случая содержится въ вѣроятности перваго какъ 1259712 къ 104125 или почти какъ $12\frac{1}{10}$ къ 1.

. . . . . .

Въ вышеупомянутыхъ сочиненіяхъ *Христіани*, *Флоренкура* и *Тетена* заключается нѣсколько и о вычисленіи вѣроятностей, преимущественно въ отношеніи къ смертности. Особенное сочиненіе по этой части есть: «Calcul des probabilités» par *Bicquilley*, написанное весьма ясно и сверхъ того, непредполагающее въ читателѣ обширныхъ познаній.

СМѢШАННЫЯ ЗАДАЧИ.

1. Изъ игры, состоящей изъ 32 картъ, выдергиваютъ 3 карты, на каждую изъ нихъ кладутъ столько картъ, чтобы всегда сумма очковъ на выдернутой картѣ, сложенная съ числомъ положенныхъ на нее картъ, составляла 15; послѣ этого осталось еще 8 картъ; спрашивается: чему равна сумма очковъ на первыхъ выдернутыхъ трехъ картахъ?

Отв. 24.

2. Изъ игры, состоящей изъ a картъ, выдергиваютъ n картъ, на каждую изъ оныхъ кладутъ столько картъ, чтобы всегда сумма очковъ на картѣ, лежащей внизу, и число картъ, лежащихъ на одной, составляла сумму s. Послѣ этого остается еще r картъ; спрашивается: чему равна сумма очковъ на первыхъ выдернутыхъ n картахъ?

Отв. $ns + n + r - a$.

3. Нѣкто купилъ кусокъ сукна и заплатилъ на каждые 5 аршинъ 70 руб.; продавая же это сукно, онъ за каждые 11 аршинъ получилъ 160 рублей, чрезъ что имѣетъ по этой продажѣ 240 рублей барыша. Спрашивается: сколько аршинъ было въ кускѣ?

Отв. 440.

4. Два путешественника, отправляясь въ путь взяли съ собою денегъ: *A* 100 рублей, а *B* 48 рублей. Дорогою напали на нихъ разбойники и отняли у каждаго нѣкоторую часть ихъ денегъ; но хотя у *A* отняли вдвое болѣе чѣмъ у *B*, у него все-таки осталось втрое болѣе чѣмъ у *B*. Спрашивается: сколько у каждаго изъ нихъ отняли?

Отв. У *A* 88, у *B* 44 рубля.

5. Переплетчикъ продаетъ мнѣ двѣ переплетенныя книги чистой бумаги, одну, содержащую 48 листовъ, за 14 рублей, а другую, содержащую 78 листовъ, за 19 рублей. Переплетъ и бумага въ обѣихъ книгахъ одинаковы. Спрашивается цѣна переплета?

Отв. 6 рублей.

6. 156 рублей должно раздѣлить между 16 мальчиками сообразно ихъ лѣтамъ такъ, чтобы каждый старшій получилъ одною и тою же суммою болѣе, чѣмъ слѣдующій за нимъ младшій. Если, при таковомъ раздѣлѣ, самый младшій получитъ 6 рублей, то спрашивается: какъ велика сумма, которую каждый старшій получаетъ болѣе чѣмъ предъидущій младшій? И сколько получитъ самый старшій изъ нихъ?

Отв. 50 копеекъ и 13 рублей 50 копеекъ.

7. Долгъ въ 2363 рубля долженъ быть уплаченъ въ 34 термина такъ, чтобы въ каждый терминъ должникъ уплачивалъ 3 рублями болѣе чѣмъ въ предъидущій. Спрашивается: сколько онъ долженъ заплатить въ первый терминъ?

Отв. 20 рублей.

8. Бассейнъ, который посредствомъ двухъ отверстій наполняется водою въ 12 минутъ, могъ бы посредствомъ одного только изъ этихъ отверстій быть наполненъ въ 20 минутъ. Спрашивается: сколько потребно времени для наполненія бассейна посредствомъ другаго только отверстія?

Отв. 30 минутъ.

9. Нѣкто за 18 рублей купилъ нѣкоторое число яблокъ и грушъ, и ему обошлись 4 яблока въ 1 рубль и 5 грушъ также въ 1 рубль; послѣ этого онъ уступилъ своему пріятелю половину купленныхъ имъ яблоковъ и треть грушъ, и получилъ отъ него за это 8 рублей, которые самъ заплатилъ за нихъ. Спрашивается: сколько онъ самъ купилъ яблокъ и грушъ?

Отв. 48 яблокъ и 30 грушъ.

10. Найти такое число, что если бы приложили оное постепенно къ числамъ 15, 27 и 45, то получили бы три числа, которыя должны находиться въ геометрической пропорціи?

Отв. 9.

11. Найти первые три члена двухъ прогрессій, ариѳметической и геометрической, по слѣдующимъ признакамъ: сумма всѣхъ шести членовъ равняется 96; сверхъ того, первый членъ ариѳметической прогрессіи содержится въ первомъ членѣ геометрической 2 раза; второй членъ ариѳметической прогрессіи содержится во второмъ членѣ геометрической 3 раза, а третій членъ ариѳметической содержится въ третьемъ членѣ геометрической прогрессіи 6 разъ?

Отв. 3, 6, 9 и 6, 18, 54.

12. *A*, *B*, *C* желаютъ купить картину, но ни одинъ изъ нихъ не имѣетъ при себѣ денегъ, потребныхъ на эту покупку. Чтобы каждый изъ нихъ могъ купить одинъ эту картину, то *A* проситъ у *B* и *C* половину ихъ денегъ; *B* проситъ у *A* и *C* третью часть ихъ денегъ; а *C* проситъ у *A* и *B* четвер-

тую часть ихъ денегъ. Спрашивается: сколько у каждаго изъ нихъ было при себѣ денегъ, и чего стоитъ картина, если извѣстно, что эти три особы имѣли при себѣ только одни четвертаки?

Отв. Картина стоитъ 17 рублей, и въ этомъ случаѣ у *A* было 5, у *B* 11, а у *C* 13 рублей; или картина стоитъ 34 рубля и у *A* было 10, у *B* 22, а у *C* 26 рублей: или и т. д.

13. Пятеро: *A*, *B*, *C*, *D*, *E* издержали вмѣстѣ въ трактирѣ нѣкоторую сумму, и уплату этой суммы хотѣли поручить одному изъ нихъ; но, при счетѣ четвертаковъ, которые каждый изъ нихъ имѣлъ при себѣ (меньшей монеты у нихъ не было) оказалось, что ни одинъ не въ состояніи заплатить всей суммы. Если же хотятъ, чтобы одинъ изъ нихъ заплатилъ всю сумму, то должны сложиться слѣдующимъ образомъ: *A* долженъ получить отъ каждаго четвертую часть его денегъ, или *B* пятую, или *C* шестую, или *D* седьмую или *E* восьмую часть. Спрашивается: сколько они издержали, и сколько каждый изъ нихъ имѣлъ при себѣ четвертаковъ?

Отв. Они издержали по-крайней-мѣрѣ 879 рублей, и въ этомъ случаѣ у *A* было 319, у *B* 459, у *C* 543, у *D* 599, а у *E* 639 рублей; или и т. д.

14. Нѣсколько незнакомыхъ между собою особъ хотѣли сдѣлать на общій счетъ путешествіе и наняли для этого карету за 342 рубля. Дорогою трое изъ нихъ ушли, чрезъ что каждый изъ остальныхъ долженъ былъ заплатить 19 рублями болѣе того, что прежде приходилось на его долю. Спрашивается: сколько въ этомъ обществѣ было первоначально особъ?

Отв. 9.

15. Слитокъ золота проданъ съ убыткомъ за 420 рублей; если бы этотъ слитокъ продали за 570 рублей, то въ этомъ случаѣ барышъ былъ бы вчетверо болѣе убытка, понесен-

наго при продажѣ этого слитка за 420 рублей. Спрашивается: чего стоилъ слитокъ самому продавцу?

Отв. 450 рублей.

16. Восемь лошадей въ продолженіи 7 недѣль вытравили лугъ, состоящій изъ 400 квадратныхъ саженей, такъ-что не только съѣли траву, бывшую на немъ вначалѣ, но и ту, которая выросла въ продолженіи этого времени. При одинаковомъ кормѣ девять лошадей въ 8 недѣль вытравили лугъ, состоящій изъ 500 квадратныхъ саженей. Спрашивается: сколькими лошадьми лугъ, состоящій изъ 600 квадратныхъ саженей, будетъ вытравленъ въ 10 недѣль?

Отв. 8.

17. Нѣкто, умирая, оставлялъ беременную жену и въ духовной о наслѣдствѣ капитала его, простиравшагося до 9000 рублей, завѣщалъ: что если жена родитъ сына, то онъ долженъ получить изъ капитала втрое болѣе матери; если же родится дочь, то она должна получить вдвое менѣе матери. Вскорѣ послѣ смерти завѣщателя жена его родила близнецовъ, сына и дочь. Спрашивается: какъ должно раздѣлить капиталъ въ этомъ случаѣ?

Отв. Мать должна получить 2000, сынъ 6000, а дочь 1000 рублей.

18. Одинъ путешественникъ, отправившись изъ нѣкотораго мѣста, въ первый день дѣлаетъ одну милю, во второй двѣ, въ третій три, въ четвертый четыре, и т. д. въ этой же прогрессіи. Пять дней спустя, изъ того же мѣста отправляется другой путешественникъ, по тому же направленію и дѣлаетъ ежедневно 12 миль. Спрашивается: въ который день, послѣ отъѣзда перваго путешественника, второй догонитъ его?

Отв. Въ восьмой день; и если они будутъ продолжать свое путешествіе по прежнему, то вторично въ пятнадцатый день.

19. Пусть первый путешественникъ, въ предъидущей задачѣ, въ первый день дѣлаетъ a миль, въ каждый же слѣдующій d милями болѣе чѣмъ въ предъидущій. Пусть второй путешественникъ отправится n дней спустя и ежедневно дѣлаетъ b миль. Спрашивается: чрезъ сколько дней второй догонитъ перваго?

Отв. Чрезъ $\frac{-(2a-2b-d) \pm \sqrt{[(2a-2b-d)^2-8bdn]}}{2d}$ дней.

20. Найти два числа, которыя бы имѣли то свойство, чтобы произведеніе ихъ равнялось суммѣ этихъ же чиселъ, и чтобы сумма чиселъ, сложенная съ суммою квадратовъ ихъ, составила $15\frac{3}{4}$?

Отв. 3 и $\frac{3}{2}$.

21. Одного пастуха спросили, сколько у него овецъ? Онъ отвѣчалъ: если буду считать своихъ овецъ по 4 или по 6 или по 9, то каждый разъ останутся лишнихъ 3 овцы; если же буду ихъ считать по 7 или по 13, то каждый разъ останется 1 овца; когда же буду ихъ считать по 11, то останется 7. Спрашивается: сколько у него было овецъ?

Отв. 183 или 36219, или и т. д.

22. Два канонира наполнили вмѣстѣ 1000 патроновъ и издержали пороха поровну. Одинъ изъ нихъ говоритъ другому: если бы я наполнилъ столько патроновъ, сколько ты, то издержалъ бы 18 фунтовъ пороха. На это другой отвѣчалъ ему: если бы я наполнилъ столько патроновъ, сколько ты, то издержалъ бы 8 фунтовъ пороха. Спрашивается: сколько патроновъ каждый изъ нихъ наполнилъ и сколько издержалъ пороха?

Отв. Первый наполнилъ 400, а второй 600 патроновъ, и каждый издержалъ 12 фунтовъ пороха.

23. Чрезъ сколько времени 1 рубль, будучи отданъ въ ростъ по 5 процентовъ, считая проценты на проценты, возрастетъ до 1000 рублей?

Отв. Между 141 и 142 годами.

24. Нѣкто имѣетъ бочку вина въ 100 ведеръ, изъ которыхъ каждое стоитъ 1 рубль 50 копеекъ. Изъ этой бочки онъ отливаетъ одно ведро и доливаетъ бочку водою; когда вода смѣшалась съ виномъ, онъ опять отливаетъ одно ведро и доливаетъ бочку водою. Спрашивается: сколько разъ онъ долженъ это повторить, чтобы наконецъ ведро смѣси стоило 1 рубль.

Отв. 40 до 41 раза.

25. Разложить 70 на такія три части, чтобы сумма произведеній первой части на 7, второй на 8, а третьей на 9, равнялась 561?

Отв. 1, 67, 2; или 2, 65, 3; или 3, 63, 4; или и т. д.

26. Учитель задалъ ученику перемножить между собою нѣкоторыя два числа, изъ которыхъ одно было 75-ю болѣе другаго. По окончаніи умноженія ученикъ долженъ былъ сдѣлать повѣрку и произведеніе раздѣлить на меньшаго множителя, отъ чего получилъ въ частномъ 227, а въ остаткѣ 113. Учитель нашелъ, что умноженіе было сдѣлано невѣрно, и приказалъ исправить ошибку. Когда ученикъ нашелъ эту ошибку, то сказалъ учителю, что онъ при умноженіи ошибся единицею; учитель же отвѣчалъ, что онъ ошибся не единицею, а цѣлою тысячью. Спрашивается: какія числа ученикъ перемножилъ между собою?

Отв. 159 и 234.

27. Въ нѣкоторомъ разсолѣ вѣсъ воды $= a$, вѣсъ соли $= b$, слѣдовательно содержаніе разсола $= \frac{b}{a+b}$. Спра-

шивается: сколько къ этому разсолу должно прилить воды, чтобы содержаніе его было $= g$?

Отв. $\frac{b}{g} - (a + b)$. Единица вѣса одинаковаго съ единицею вѣсовъ a и b.

Что будетъ означать это выраженіе, когда $\frac{b}{g} < a + b$, т. е. $\frac{b}{a + b} < g$?

28. Нѣкоторое вещество A въ p разъ тяжелѣе воды; другое вещество B въ p' разъ тяжелѣе воды; спрашивается: сколько должно соединить втораго вещества съ кускомъ перваго вещества, вѣсомъ $= g$, чтобы плотность составленнаго такимъ образомъ тѣла была p'' разъ болѣе плотности воды, предполагая, что величина p'' заключается между p и p'?

Отв. $\frac{gp'(p - p'')}{p(p'' - p')}$. Въ этомъ выраженіи единица вѣса та же самая, какъ и для g.

29. Свинецъ въ 11,324 разъ тяжелѣе воды; вѣсъ воды содержится къ вѣсу пробковаго дерева какъ 1 къ 0,24, а къ вѣсу еловаго дерева какъ 1 къ 0,45. Спрашивается: сколько пробковаго дерева должно соединить съ кускомъ свинца въ 60 фунтовъ, чтобы составленное такимъ образомъ тѣло вѣсило столько же, сколько кусокъ еловаго дерева равнаго объема, слѣдовательно, чтобы могло плавать?

Отв. 65,846 фунтовъ.

30. Означимъ чрезъ w и x двѣ величины, зависящія одна отъ другой такъ, что если дадимъ количеству x, n опредѣленныхъ величинъ a, a', a'', a''', etc. то величина w приметъ n соотвѣтствующихъ опредѣленныхъ величинъ c, c', c'', c''', etc. Спрашивается: какъ величину w выразить полиномомъ по степенямъ x такъ, чтобы данныя условія были удовлетворены?

Отв. Положимъ $w = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \ldots + Hx^{n-1}$; потомъ, подставляя послѣдовательно вмѣсто w и

x соотвѣтствующія имъ величины c, a; c', a'; c'', a''; c''', a'''; etc., получимъ n уравненій, изъ которыхъ опредѣляется коэфиціенты A, B, C, D, E,.....H.

31. Пусть будетъ w величина, зависящая отъ двухъ другихъ x и y. Положимъ, что, для опредѣленныхъ значеній x и y, напримѣръ $x = a$, $y = b$, должны имѣть $w = c$; также для $x = a'$, $y = b'$, будетъ $w = c'$; для $x = a''$, $y = b''$, $w = c''$ и т. д. Спрашивается: какъ величину w выразить полиномомъ, простирающимся по степенямъ x и y? (смотри стр. 287).

Отв. Положимъ $w = A + Bx + B'y + Cx^2 + C'xy + C''y^2 + Dx^3 + D'x^2y +$ etc. и напишемъ во второй части этого уравненія столько членовъ, сколько имѣется системъ для величинъ w, x и y; потомъ будемъ подставлять вмѣсто w, x и y каждую систему имъ соотвѣтствующихъ величинъ, именно: c, a, b; c', a', b'; c'', a'', b'', etc., то получимъ столько уравненій, сколько потребно для опредѣленія коэфиціентовъ A, B, B', C, C', C'', D, D', etc.; слѣдовательно опредѣлимъ эти коэфиціенты.

32. Пусть будетъ w величина, зависящая отъ трехъ другихъ x, y и z. Положимъ, что для опредѣленныхъ значеній x, y и z, напримѣръ $x = a$, $y = b$, $z = c$, должны имѣть $w = p$; также для $x = a'$, $y = b'$, $z = c'$ будетъ $w = p'$; для $x = a''$, $y = b''$, $z = c''$, $w = p''$ и т. д. Спрашивается: какъ величину w выразить полиномомъ простирающимся по степенямъ x, y и z?

Отв. Положимъ $w = A + Bx + B'y + B''z + Cx^2 + C'xy + C''xz + C''y^2 + C'''z^2 + Dx^3 + D'x^2y + D''x^2z +$ etc. и будемъ поступать какъ въ предъидущихъ двухъ задачахъ.

Подобнымъ образомъ надлежало бы поступать, если бы имѣли большее число величинъ и нѣсколько соотвѣтствую-

щихъ имъ значеній. Эти задачи употребляются съ большою пользою какъ въ Физикѣ, такъ и во всѣхъ частяхъ прикладной Математики. Онѣ также служатъ основаніемъ многихъ аналитическихъ методъ и формулъ, служащихъ для интерполированія.

33. Найти такое число, что если умножимъ оное на квадратъ другаго числа, единицею меньшее искомаго, то произведеніе должно быть $= 1$?

Отв. Искомое число опредѣляется уравненіемъ $x^3 - 2x^2 + x - 1 = 0$; это уравненіе имѣетъ только одинъ возможный корень, равный 1,7548....

34. Чему равняется непрерывная, до безконечности простирающаяся дробь

$$\cfrac{1}{q+\cfrac{1}{q+\cfrac{1}{q+\text{etc.?}}}}$$

Отв. $\dfrac{-q+\sqrt{(q^2+4)}}{2}$.

35. Чему равняется непрерывная, безконечная дробь

$$\cfrac{1}{q+\cfrac{1}{r+\cfrac{1}{q+\cfrac{1}{r+\text{etc.?}}}}}$$

Отв. $-\frac{r}{2}+\sqrt{\left(\frac{r^2}{4}+\frac{r}{q}\right)}$.

36. Чему равняется непрерывная дробь, подобная предъидущей, въ которой, вмѣсто періода частныхъ q и r, имѣемъ періодъ частныхъ q, r и s?

Отв. $\dfrac{-qrs+q+s-r-\sqrt{[(qrs+q+s+r)^2+4]}}{2(qr+1)}$

37. Чему равняется подобная непрерывная дробь, въ которой періодъ частныхъ будетъ q, r, s, t?

Отв. $\frac{-qrst+qr+qt+st-rs}{2\,(qrs+q+s)} + \frac{\sqrt{[(qrst+qr+qt+st+rs+2)^2-4]}}{2\,(qrs+q+s)}$.

Какъ опредѣлить законъ подобной періодической непрерывной дроби, при большомъ числѣ отличныхъ между собою частныхъ?

38. Найти такую геометрическую пропорцію, въ которой бы сумма среднихъ членовъ равнялась a, сумма крайнихъ была $= b$, а сумма четвертыхъ степеней всѣхъ четырехъ членовъ $= c$?

Отв. Означая чрезъ d разность двухъ среднихъ членовъ, будемъ имѣть $d = \sqrt{[-a^2 - 2b^2 \pm 2\sqrt{(c + 2a^2b^2)}]}$, искомая же пропорція есть слѣдующая:

$$\tfrac{1}{2}\,[b - \sqrt{(b^2 - a^2 + d^2)}] : \tfrac{1}{2}\,(a - d) = \tfrac{1}{2}\,(a + d) : \tfrac{1}{2}\,[b + \sqrt{(b^2 - a^2 + d^2)}].$$

39. Найти такую геометрическую пропорцію, въ которой бы сумма всѣхъ членовъ равнялась a, сумма квадратовъ ихъ была $= b$, а сумма четвертыхъ степеней $= c$.

Отв. Означая чрезъ p произведеніе крайнихъ, а слѣдовательно и произведеніе среднихъ членовъ, а чрезъ d разность между суммою крайнихъ и суммою среднихъ членовъ, получимъ $p = \frac{a^2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a^4 + 2a^2b + b^2 - 2c}{8}\right)}$ и $d = \sqrt{(2b + 8p - a^2)}$. Искомая же пропорція есть слѣдующая $\tfrac{1}{4}\,[a-d-\sqrt{((a-d)^2-16p)}] : \tfrac{1}{4}\,[a+d-\sqrt{((a+d)^2-16p)}] = \tfrac{1}{4}\,[a+d+\sqrt{((a+d)^2-16p)}] : \tfrac{1}{4}\,[a-d+\sqrt{((a-d)^2-16p)}]$.

40. Должникъ обязанъ суммы a, a', a'', a''', etc. уплатить въ термины n, n', n'', n''', etc.; но онъ хочетъ весь долгъ $a + a' + a'' + a''' +$ etc. заплатить вдругъ. Спрашивается: по прошествіи какого времени онъ долженъ это исполнить,

если будемъ считать по p процентовъ на сто и возьмемъ въ соображеніе проценты на проценты?

Отв. Означая чрезъ w, w', w'', w''', etc. истинныя достоинства этихъ уплатъ въ термины, такъ-что

$$w = \left(1 + \frac{p}{100}\right)^{n}, \; w' = \left(1 + \frac{p}{100}\right)^{n'}, \; w'' = \left(1 + \frac{p}{100}\right)^{n''},$$

etc., то выраженіе:

$$\frac{\log\ (a + a' + a'' + a''' + \text{etc.}) - \log\ (w + w' + w'' + w''' + \text{etc.}}{\log\ (100 + p) - 2}$$

будетъ искомое время. (Единица времени одинакова съ тою, посредствомъ которой выражены величины n, n', n'', n''', etc.)

41. Нѣкто долженъ 40000 рублей; но такъ какъ онъ не можетъ уплатить этого долга вдругъ, то онъ согласится съ своимъ кредиторомъ уплачивать ему въ концѣ каждаго года по 2500 рублей, и считать по 5 процентовъ на сто. Когда онъ вычислилъ время въ которое весь его долгъ будетъ уплаченъ, то нашелъ, что въ концѣ послѣдняго года ему не придется заплатить 2500 рублей, а немногимъ менѣе. Спрашивается: сколькимъ менѣе если будемъ считать и проценты на проценты?

Отв. 31,88 рублемъ менѣе.

42. Найти четыре числа, которыя бы имѣли слѣдующія свойства: сумма ихъ должна быть $= a$, сумма квадратовъ ихъ $= b$, сумма двѣнадцати произведеній, которыя получатся, когда каждое изъ искомыхъ чиселъ умножимъ на квадратъ другаго $= c$, а сумма шести произведеній, которыя получатся, когда квадратъ каждаго числа умножимъ на квадратъ другаго $= d$?

Отв. Сумма произведеній искомыхъ четырехъ чиселъ, взятыхъ по-два $= \frac{1}{2}\ (a^2 - b)$; сумма ихъ произведеній по три $= \frac{1}{6}\ (a^3 - ab - 2c)$; а произведеніе всѣхъ четырехъ $= \frac{1}{24}$

$(a^4 + 2a^2b - 3b^2 - 8ac + 12d)$. Слѣдовательно искомыя четыре числа опредѣлятся изъ уравненія:

$$x^4 - ax^3 + \frac{1}{2}(a^2 - b)x^2 - \frac{1}{6}(a^3 - ab - 2c)x + \frac{1}{24}(a^4 + 2a^2b - 3b^2 - 8ac + 12d) = 0.$$

43. Найти четыре числа по слѣдующимъ признакамъ: сумма ихъ $= a$; сумма ихъ квадратовъ $= b$; сумма кубовъ $= c$; а сумма четвертыхъ степеней $= d$?

Отв. Сумма произведеній искомыхъ четырехъ чиселъ, взятыхъ по-два $= \frac{1}{2}(a^2 - b)$; сумма произведеній ихъ по-три $= \frac{1}{6}(a^3 - 3ab + 2c)$; а произведеніе всѣхъ четырехъ $= \frac{1}{24}(a^4 - 6a^2b + 3b^2 + 8ac - 6d)$. Слѣдовательно искомыя числа будутъ корни уравненія:

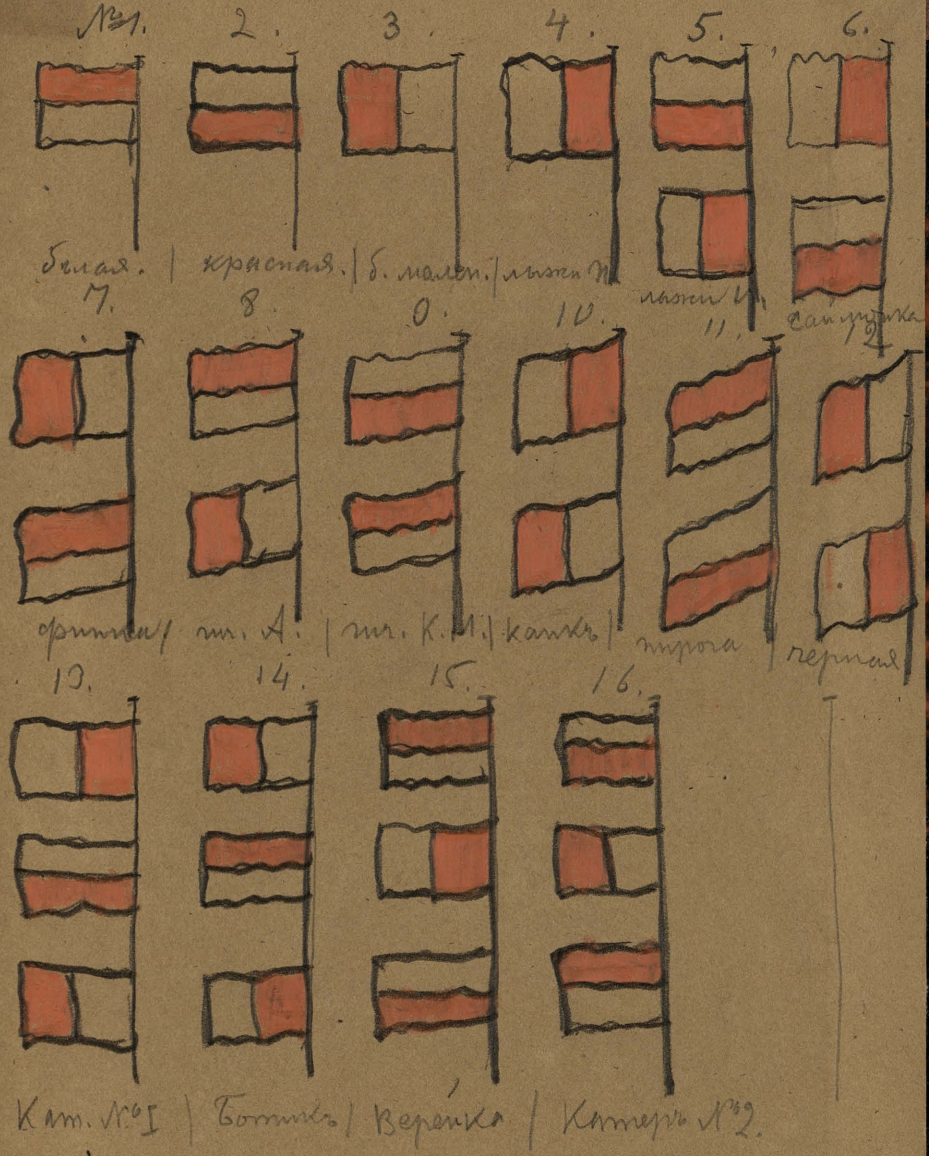
$$x^4 - ax^3 + \frac{1}{2}(a^2 - b)x^2 - \frac{1}{6}(a^3 - 3ab + 2c)x + \frac{1}{24}(a^4 - 6a^2b + 3b^2 + 8ac - 6d) = 0.$$

КОНЕЦЪ.

2007040962

$$\frac{adc + bc}{dc - cf} = \frac{adc(b+c)}{dc(e-f)}\Big\}$$

prim
113


№1.
2.
3.
4.
5.
6.
белая.
красная.
б. мален.
лъжи М.
лъжи Н.
сапурка
7.
8.
9.
10.
11.
12.
фритка
гр. А.
гр. К. М.
канъ
трога
черная
13.
14.
15.
16.
Кат. №I
Ботинъ
Верёвка
Катеръ №2.